

1 Fouriertransformation zeitkontinuierlicher Signale

1.	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) e^{2\pi i f t} df$	○—●	$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt$
2.	$x(t - t_0)$	○—●	$e^{-2\pi i f t_0} \hat{x}(f)$
3.	$e^{2\pi i f_0 t} x(t)$	○—●	$\hat{x}(f - f_0)$
4.	$x^*(t)$	○—●	$\hat{x}^*(-f)$
5.	$x(-t)$	○—●	$\hat{x}(-f)$
6.	$x(at)$	○—●	$\frac{1}{ a } \hat{x}\left(\frac{f}{a}\right)$
7.	$(x * y)(t)$	○—●	$\hat{x}(f) \hat{y}(f)$
8.	$x(t)y(t)$	○—●	$(\hat{x} * \hat{y})(f)$
9.	$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(-t))$	○—●	$\Re\{\hat{x}(f)\}$
10.	$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x^*(-t))$	○—●	$i\Im\{\hat{x}(f)\}$
11.	$\Re\{x(t)\}$	○—●	$\hat{x}_e(f) = \frac{1}{2}(\hat{x}(f) + \hat{x}^*(-f))$
12.	$i\Im\{x(t)\}$	○—●	$\hat{x}_o(f) = \frac{1}{2}(\hat{x}(f) - \hat{x}^*(-f))$
13.	$t^n x(t)$	○—●	$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \frac{d^n \hat{x}(f)}{df^n}$
14.	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	○—●	$(2\pi i f)^n \hat{x}(f)$
15.	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	○—●	$\frac{1}{2\pi i f} \hat{x}(f) + \frac{1}{2} \hat{x}(0) \delta(f)$

Einige Fouriertransformationspaare

16.	$\delta(t - t_0)$	○—●	$e^{-2\pi i f t_0}$
17.	$e^{2\pi i f_0 t}$	○—●	$\delta(f - f_0)$
18.	$\cos(2\pi f_0 t)$	○—●	$\frac{1}{2} (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$
19.	$\sin(2\pi f_0 t)$	○—●	$\frac{i}{2} (\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0))$
20.	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$	○—●	$\frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$
21.	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t / T_0}$	○—●	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$

22.	$\sigma(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{2\pi i f} + \frac{1}{2} \delta(f)$
23.	$\text{sign}(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{\pi i f}$
24.	$e^{-at} \sigma(t), \Re\{a\} > 0$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{a + 2\pi i f}$
25.	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} \sigma(t), \Re\{a\} > 0$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{(a + 2\pi i f)^n}$
26.	$e^{-a t }, \Re\{a\} > 0$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
27.	$\frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\hat{x}(f) = \begin{cases} 1, & f \leq f_c \\ 0, & f > f_c \end{cases}$
28.	$x(t) = \begin{cases} 1, & t \leq T_0 \\ 0, & t > T_0 \end{cases}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{\sin(2\pi T_0 f)}{\pi f}$
29.	$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{T_0}, & t \leq T_0 \\ 0, & t > T_0 \end{cases}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{\sin^2(\pi T_0 f)}{\pi^2 T_0 f^2}$
30.	$e^{-at^2}, a > 0$	$\circ \text{---} \bullet$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2 f^2 / a}$
31.	$\frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$	$\circ \text{---} \bullet$	$(2\pi i f)^n$
32.	t^n	$\circ \text{---} \bullet$	$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \frac{d^n \delta(f)}{df^n}$
33.	$ t $	$\circ \text{---} \bullet$	$-\frac{1}{2\pi^2 f^2}$

Dualität der Fouriertransformation

Die folgenden Korrespondenzen sind äquivalent.

$$x(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \hat{x}(f)$$

$$\hat{x}(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad x(-f)$$

$$\hat{x}(-t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad x(f)$$

Plancherelsche Identität

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) \hat{y}^*(f) df = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$$

Parsevalsche Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(f)|^2 df$$

Poissonsche Summenformel ($T > 0$)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n/T) e^{2\pi i n t / T}$$

2 Fourierreihen zeitkont. periodischer Signale

34.	$x(t) = x(t + T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t / T}$	○—●	$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-2\pi i k t / T} dt$
35.	$x(t - T_0)$	○—●	$e^{-2\pi i k T_0 / T} c_k$
36.	$e^{2\pi i m t / T} x(t)$	○—●	c_{k-m}
37.	$x^*(t)$	○—●	c_{-k}^*
38.	$x(-t)$	○—●	c_{-k}
39.	$x(at), \quad a > 0$	○—●	$c_k, \quad \text{Periode } \frac{T}{a}$
40.	$\int_0^T x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	○—●	$T c_k d_k, \quad x, y \text{ gleiche Periode}$
41.	$x(t) y(t)$	○—●	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l d_{k-l}, \quad x, y \text{ gleiche Periode}$
42.	$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(-t))$	○—●	$\Re\{c_k\}$
43.	$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x^*(-t))$	○—●	$i\Im\{c_k\}$
44.	$\Re\{x(t)\}$	○—●	$\frac{1}{2}(c_k + c_{-k}^*)$
45.	$i\Im\{x(t)\}$	○—●	$\frac{1}{2}(c_k - c_{-k}^*)$
46.	$\frac{dx(t)}{dt}$	○—●	$\frac{2\pi i k}{T} c_k$
47.	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \text{ mit } c_0 = 0$	○—●	$\frac{T}{2\pi i k} c_k$

Einige Fourierreihen¹

48.	$e^{2\pi i t / T}$	○—●	$\delta[k - 1]$
49.	$\cos(2\pi t / T)$	○—●	$\frac{1}{2}(\delta[k + 1] + \delta[k - 1])$
50.	$\sin(2\pi t / T)$	○—●	$\frac{i}{2}(\delta[k + 1] - \delta[k - 1])$
51.	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	○—●	$\frac{1}{T} \quad \forall k$
52.	$x(t) = \begin{cases} 1, & t \leq T_1 \\ 0, & T_1 < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$	○—●	$\frac{\sin(2\pi k T_1 / T)}{\pi k}$
53.	$ \cos(2\pi t / T) \quad (\text{Periode } \frac{T}{2})$	○—●	$\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k}{1 - (2k)^2}$

¹ Die Funktion $\delta[\cdot]$ ist der Einsimpuls für diskrete Argumente bzw. $\delta(\cdot)$ die Diracsche Deltafunktion für kontinuierliche Argumente.

Plancherelsche Identität für periodische Signale $x, y \in L^2([0, T])$

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t)y^*(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^x (c_k^y)^*$$

Parsevalsche Beziehung für periodische Signale $x \in L^2([0, T])$

$$\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

3 Fouriertransformation zeitdiskreter Signale

54.	$x[n] = \int_0^1 \hat{x}(\theta) e^{2\pi i n \theta} d\theta$	○—●	$\hat{x}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-2\pi i n \theta}$
55.	$x[n - N_0]$	○—●	$e^{-2\pi i N_0 \theta} \hat{x}(\theta)$
56.	$e^{2\pi i n \theta_0} x[n]$	○—●	$\hat{x}(\theta - \theta_0)$
57.	$x^*[n]$	○—●	$\hat{x}^*(\theta)$
58.	$x[-n]$	○—●	$\hat{x}(-\theta)$
59.	$(x * y)[n]$	○—●	$\hat{x}(\theta) \hat{y}(\theta)$
60.	$x[n]y[n]$	○—●	$(\hat{x} * \hat{y})(\theta)$ (siehe ²)
61.	$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	○—●	$\Re\{\hat{x}(\theta)\}$
62.	$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	○—●	$i\Im\{\hat{x}(\theta)\}$
63.	$\Re\{x[n]\}$	○—●	$\hat{x}_e(\theta) = \frac{1}{2}(\hat{x}(\theta) + \hat{x}^*(\theta))$
64.	$i\Im\{x[n]\}$	○—●	$\hat{x}_o(\theta) = \frac{1}{2}(\hat{x}(\theta) - \hat{x}^*(\theta))$
65.	$nx[n]$	○—●	$\frac{i}{2\pi} \frac{d\hat{x}(\theta)}{d\theta}$
66.	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	○—●	$\frac{1}{1 - e^{-2\pi i \theta}} \hat{x}(\theta) + \frac{1}{2} \hat{x}(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - k)$

² Bei dieser Faltung im periodischen Frequenzbereich handelt es sich um die *periodische Faltung*, definiert durch $(\hat{x} * \hat{y})(\theta) = \int_0^1 \hat{x}(\tau) \hat{y}(\theta - \tau) d\tau$.

Einige Fouriertransformationen³

67.	$\delta[n - N_0]$	○—●	$e^{-2\pi i N_0 \theta}$
68.	$e^{2\pi i \theta_0 n}$	○—●	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_0 - k)$
69.	$\cos(2\pi \theta_0 n)$	○—●	$\frac{1}{2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta + \theta_0 - k) + \delta(\theta - \theta_0 - k) \right)$
70.	$\sin(2\pi \theta_0 n)$	○—●	$\frac{i}{2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta + \theta_0 - k) - \delta(\theta - \theta_0 - k) \right)$
71.	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$	○—●	$\frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - \frac{k}{N}\right)$
72.	$\sigma[n]$	○—●	$\frac{1}{1 - e^{-2\pi i \theta}} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - k)$
73.	$a^n \sigma[n], \quad a < 1$	○—●	$\frac{1}{1 - ae^{-2\pi i \theta}}$
74.	$\frac{\sin(2\pi n \alpha)}{\pi n}, \quad 0 < \alpha < 1/2$	○—●	$\begin{cases} 1, & \theta \leq \alpha \\ 0, & \alpha < \theta \leq 1/2 \end{cases} \quad (1\text{-periodisch})$
75.	$x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & n > N_1 \end{cases}$	○—●	$\frac{\sin((2N_1 + 1)\pi\theta)}{\sin(\pi\theta)}$

Parsevalsche Beziehung für aperiodische zeitdiskrete Signale

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_0^1 |\hat{x}(\theta)|^2 d\theta$$

Spektrum abgetasteter zeitkontinuierlicher Signale

Wird ein zeitkontinuierliches Signal $x_c(t)$ mit der Rate $\frac{1}{T}$ abgetastet, so gilt zwischen der zeitdiskreten Fouriertransformation des entstandenen zeitdiskreten Signals $x_d[n] = x_c(nT)$ und der Fouriertransformation des zeitkontinuierlichen Signals die Beziehung

$$\hat{x}_d(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}_c\left(\frac{\theta - k}{T}\right).$$

Interpolationsformel

Für kritische Abtastung gilt die Interpolationsformel

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t - kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t - kT)}.$$

³ Bei den Beziehungen ist die 1-Periodizität im Frequenzbereich zu berücksichtigen. Die Funktion $\delta[\cdot]$ ist der Einsimpuls für diskrete Argumente bzw. $\delta(\cdot)$ die Diracsche Deltafunktion für kontinuierliche Argumente.

4 Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Merkregel: In den DFT-Formeln ist ein N -Punkt Signal stets als eine Periode eines periodischen zeitdiskreten Signals zu betrachten.

76.	$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k] e^{2\pi i k n / N}$	○—●	$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i k n / N}$
77.	$x[n - N_0]$	○—●	$e^{-2\pi i k N_0 / N} \hat{x}[k]$
78.	$e^{2\pi i k_0 n / N} x[n]$	○—●	$\hat{x}[k - k_0]$
79.	$x^*[n]$	○—●	$\hat{x}^*[-k]$
80.	$x^*[-n]$	○—●	$\hat{x}^*[k]$
81.	$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[n - m]$	○—●	$\hat{x}[k] \hat{y}[k]$
82.	$x[n] y[n]$	○—●	$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{x}[m] \hat{y}[k - m]$
83.	$x_e[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x^*[-n])$	○—●	$\Re\{\hat{x}[k]\}$
84.	$x_o[n] = \frac{1}{2} (x[n] - x^*[-n])$	○—●	$i\Im\{\hat{x}[k]\}$
85.	$\Re\{x[n]\}$	○—●	$\frac{1}{2} (\hat{x}[k] + \hat{x}^*[-k])$
86.	$i\Im\{x[n]\}$	○—●	$\frac{1}{2} (\hat{x}[k] - \hat{x}^*[-k])$

Einige DFT Beispiele⁴

87.	$e^{2\pi i k_0 n / N}$	○—●	$N\delta[k - k_0]$
88.	$\cos\left(\frac{2\pi k_0}{N} n\right)$	○—●	$\frac{N}{2} (\delta[k + k_0 - N] + \delta[k - k_0])$
89.	$\sin\left(\frac{2\pi k_0}{N} n\right)$	○—●	$\frac{iN}{2} (\delta[k + k_0 - N] - \delta[k - k_0])$
90.	$\delta[n]$	○—●	1
91.	$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N_1 \\ 1, & N - N_1 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$	○—●	$\frac{\sin\left((2N_1 + 1)\frac{\pi k}{N}\right)}{\sin\frac{\pi k}{N}}$

⁴ In den Formeln gilt $0 \leq n \leq N - 1$, $0 \leq k \leq N - 1$ und $0 \leq m \leq N - 1$.

5 \mathcal{Z} -Transformation

$$x[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{n-1} dz \quad \circ \text{---} \bullet \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Die in der Tabelle angegebenen Bereiche sind die Konvergenzringe der zweiseitigen \mathcal{Z} -Transformation und können in einzelnen Fällen auch grösser sein.

92.	$x[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$X(z)$	$R_{x_-} < z < R_{x_+}$
93.	$y[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$Y(z)$	$R_{y_-} < z < R_{y_+}$
94.	$ax[n] + by[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$aX(z) + bY(z)$	$\max(R_{x_-}, R_{y_-}) < z < \min(R_{x_+}, R_{y_+})$
95.	$x[n + n_0]$	$\circ \text{---} \bullet$	$z^{n_0} X(z)$	$R_{x_-} < z < R_{x_+}$
96.	$z_0^n x[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$ z_0 R_{x_-} < z < z_0 R_{x_+}$
97.	$nx[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R_{x_-} < z < R_{x_+}$
98.	$x^*[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$X^*(z^*)$	$R_{x_-} < z < R_{x_+}$
99.	$x[-n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_{x_+}} < z < \frac{1}{R_{x_-}}$
100.	$\Re\{x[n]\}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{2}(X(z) + X^*(z^*))$	$R_{x_-} < z < R_{x_+}$
101.	$i\Im\{x[n]\}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{2j}(X(z) - X^*(z^*))$	$R_{x_-} < z < R_{x_+}$
102.	$(x * y)[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$X(z)Y(z)$	$\max(R_{x_-}, R_{y_-}) < z < \min(R_{x_+}, R_{y_+})$
103.	$x[n]y[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{X(v)}{v} Y\left(\frac{z}{v}\right) dv$	$R_{x_-} R_{y_-} < z < R_{x_+} R_{y_+}$
104.	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$	$\max(R_{x_-}, 1) < z < R_{x_+}$

Einige Z -Transformationspaare

105.	$\delta[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	1	$\forall z$
106.	$\sigma[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
107.	$-\sigma[-n-1]$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z}{z-1}$	$ z < 1$
108.	$\alpha^n \sigma[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z}{z-\alpha}$	$ z > \alpha $
109.	$-\alpha^n \sigma[-n-1]$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z}{z-\alpha}$	$ z < \alpha $
110.	$n\sigma[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
111.	$-n\sigma[-n-1]$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z < 1$
112.	$\sin(\alpha n) \sigma[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z \sin(\alpha)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1}$	$ z > 1$
113.	$\cos(\alpha n) \sigma[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z(z - \cos(\alpha))}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1}$	$ z > 1$
114.	$\rho^n \sin(\alpha n) \sigma[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{\rho z \sin(\alpha)}{z^2 - 2\rho z \cos(\alpha) + \rho^2}$	$ z > \rho$
115.	$\rho^n \cos(\alpha n) \sigma[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z(z - \rho \cos(\alpha))}{z^2 - 2\rho z \cos(\alpha) + \rho^2}$	$ z > \rho$
116.	$\sin(\alpha n + \varphi) \sigma[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{z^2 \sin(\varphi) + z \sin(\alpha - \varphi)}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1}$	$ z > 1$
117.	$\frac{1}{n}, \quad n > 0$	$\circ \text{---} \bullet$	$\log_e \left(\frac{z}{z-1} \right)$	$ z > 1$
118.	$\frac{1 - e^{-\alpha n}}{n} \sigma[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$\alpha + \log_e \left(\frac{z - e^{-\alpha}}{z - 1} \right)$	$ z > 1, \alpha > 0$
119.	$\frac{\sin(\alpha n)}{n} \sigma[n]$	$\circ \text{---} \bullet$	$\alpha + \arctan \left(\frac{\sin(\alpha)}{z - \cos(\alpha)} \right)$	$ z > \cos(\alpha), \alpha > 0$