1 Fouriertransformation zeitkontinuierlicher Signale

1.	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\, e^{2\pi i f t} \mathrm{d}f$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2\pi i f t} \mathrm{d}t$
2.	$x(t-t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi i f t_0}\hat{x}(f)$
3.	$e^{2\pi i f_0 t}x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(f-f_0)$
4.	$x^*(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}^*(-f)$
5.	$x(-t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(-f)$
6.	$x(at)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\,\hat{x}\left(\frac{f}{a}\right)$
7.	$(x * y)(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(f)\hat{y}(f)$
8.	$x(t)y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(\hat{x} * \hat{y})(f)$
9.	$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(-t))$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathfrak{Re}\{\hat{x}(f)\}$
10.	$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x^*(-t))$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$i\mathfrak{Im}\{\hat{x}(f)\}$
11.	$\mathfrak{Re}\{x(t)\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}_e(f) = \frac{1}{2}(\hat{x}(f) + \hat{x}^*(-f))$
12.	$i\mathfrak{Im}\{x(t)\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}_o(f) = \frac{1}{2}(\hat{x}(f) - \hat{x}^*(-f))$
13.	$t^n x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \frac{\mathrm{d}^n\hat{x}(f)}{\mathrm{d}f^n}$
14.	$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(2\pi i f)^n\hat{x}(f)$
15.	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2\pi i f}\hat{x}(f) + \frac{1}{2}\hat{x}(0)\delta(f)$

Einige Fouriertransformationspaare

16.	$\delta(t-t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi i f t_0}$
17.	$e^{2\pi i f_0 t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\delta(f-f_0)$
18.	$\cos(2\pi f_0 t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}\left(\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)\right)$
19.	$\sin(2\pi f_0 t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{i}{2}\left(\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)\right)$
20.	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$
21.	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{2\pi i k t/T_0}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$

22.	$\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{1}{2\pi i f} + \dfrac{1}{2}\delta(f)$
23.	$\operatorname{sign}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{1}{\pi i f}$
24.	$e^{-at}\sigma(t), \quad \mathfrak{Re}\{a\} > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{1}{a + 2\pi i f}$
25.	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-at}\sigma(t), \quad \mathfrak{Re}\{a\} > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{1}{(a + 2\pi i f)^n}$
26.	$e^{-a\vert t\vert}, \quad \mathfrak{Re}\{a\} > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
27.	$\dfrac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(f) = \begin{cases} 1, & \vert f\vert \leq f_c \\ 0, & \vert f\vert > f_c \end{cases}$
28.	$x(t) = \begin{cases} 1, & \vert t\vert \leq T_0 \\ 0, & \vert t\vert > T_0 \end{cases}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{\sin(2\pi T_0 f)}{\pi f}$
29.	$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\vert t\vert}{T_0}, & \vert t\vert \leq T_0 \\ 0, & \vert t\vert > T_0 \end{cases}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{\sin^2(\pi T_0 f)}{\pi^2 T_0 f^2}$
30.	$e^{-at^2}, \quad a > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{-\pi^2 f^2/a}$
31.	$\dfrac{\mathrm{d}^n\delta(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(2\pi i f)^n$
32.	t^n	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\left(\dfrac{i}{2\pi}\right)^n \dfrac{\mathrm{d}^n\delta(f)}{\mathrm{d}f^n}$
33.	$\vert t\vert$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$-\dfrac{1}{2\pi^2 f^2}$

Dualität der Fouriertransformation

Die folgenden Korrespondenzen sind äquivalent.

$$x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \hat{x}(f)$$
$$\hat{x}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad x(-f)$$
$$\hat{x}(-t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad x(f)$$

Parsevalsche Beziehung für aperiodische Signale $x \in L^2(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(f)|^2 \mathrm{d}f$$

Poissonsche Summenformel ($T > 0$**)**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n/T) e^{2\pi i n t/T}$$

2 Fourierreihen zeitkont. periodischer Signale

34.	$x(t) = x(t+T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{2\pi ikt/T}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-2\pi ikt/T}\,\mathrm{d}t$
35.	$x(t-T_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi ikT_0/T} c_k$
36.	$e^{2\pi imt/T} x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	c_{k-m}
37.	$x^*(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	c^*_{-k}
38.	$x(-t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	c_{-k}
39.	$x(at), \quad a>0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	c_k, Periode $\frac{T}{a}$
40.	$\int_0^T x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$T c_k d_k$, x, y gleiche Periode
41.	$x(t)y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l\, d_{k-l}$, x, y gleiche Periode
42.	$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(-t))$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathfrak{Re}\{c_k\}$
43.	$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x^*(-t))$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$i\mathfrak{Im}\{c_k\}$
44.	$\mathfrak{Re}\{x(t)\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}(c_k + c^*_{-k})$
45.	$i\mathfrak{Im}\{x(t)\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}(c_k - c^*_{-k})$
46.	$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{2\pi ik}{T}\, c_k$
47.	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ mit $c_0 = 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{T}{2\pi ik} c_k$

Einige Fourierreihen[1]

48.	$e^{2\pi it/T}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\delta[k-1]$
49.	$\cos\bigl(2\pi t/T\bigr)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}(\delta[k+1] + \delta[k-1])$
50.	$\sin\bigl(2\pi t/T\bigr)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{i}{2}(\delta[k+1] - \delta[k-1])$
51.	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{T} \quad \forall k$
52.	$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert \le T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t\rvert \le \frac{T}{2} \end{cases}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\sin\bigl(2\pi k T_1/T\bigr)}{\pi k}$
53.	$\bigl\lvert\cos\bigl(2\pi t/T\bigr)\bigr\rvert$ (Periode $\frac{T}{2}$)	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^k}{1-(2k)^2}$

Parsevalsche Beziehung für periodische Signale $x \in L^2([0,T])$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert x(t)\rvert^2 \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert c_k\rvert^2$$

[1] Die Funktion $\delta[\cdot]$ ist der Einsimpuls für diskrete Argumente bzw. $\delta(\cdot)$ die Diracsche Deltafunktion für kontinuierliche Argumente.

3 Fouriertransformation zeitdiskreter Signale

54.	$x[n] = \int_0^1 \hat{x}(\theta)\, e^{2\pi i n\theta} \mathrm{d}\theta$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-2\pi i n\theta}$
55.	$x[n-N_0]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi i N_0\theta}\hat{x}(\theta)$
56.	$e^{2\pi i n\theta_0}x[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(\theta-\theta_0)$
57.	$x^*[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}^*(\theta)$
58.	$x[-n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(-\theta)$
59.	$(x*y)[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(\theta)\hat{y}(\theta)$
60.	$x[n]y[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(\hat{x}*\hat{y})(\theta)$ (siehe [2])
61.	$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathfrak{Re}\{\hat{x}(\theta)\}$
62.	$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$i\mathfrak{Im}\{\hat{x}(\theta)\}$
63.	$\mathfrak{Re}\{x[n]\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}_e(\theta) = \frac{1}{2}(\hat{x}(\theta) + \hat{x}^*(\theta))$
64.	$i\mathfrak{Im}\{x[n]\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}_o(\theta) = \frac{1}{2}(\hat{x}(\theta) - \hat{x}^*(\theta))$
65.	$nx[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{i}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\hat{x}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$
66.	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-e^{-2\pi i\theta}}\hat{x}(\theta) + \frac{1}{2}\hat{x}(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\theta-k)$

Einige Fouriertransformationen[3]

67.	$\delta[n-N_0]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi i N_0\theta}$
68.	$e^{2\pi i\theta_0 n}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\theta-\theta_0-k)$
69.	$\cos(2\pi\theta_0 n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\theta+\theta_0-k)+\delta(\theta-\theta_0-k)\right)$
70.	$\sin(2\pi\theta_0 n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{i}{2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\theta+\theta_0-k)-\delta(\theta-\theta_0-k)\right)$
71.	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\theta-\frac{k}{N}\right)$
72.	$\sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-e^{-2\pi i\theta}} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\theta-k)$
73.	$a^n\sigma[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-ae^{-2\pi i\theta}}$
74.	$\frac{\sin(2\pi n\alpha)}{\pi n}, \quad 0<\alpha<1/2$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\begin{cases}1, & \lvert\theta\rvert\le\alpha\\ 0, & \alpha<\lvert\theta\rvert\le 1/2\end{cases}$ (1-periodisch)

[2]Bei dieser Faltung im periodischen Frequenzbereich handelt es sich um die *periodische Faltung*, definiert durch $(\hat{x}*\hat{y})(\theta) = \int_0^1 \hat{x}(\tau)\hat{y}(\theta-\tau)\mathrm{d}\tau$

75.	$x[n] = \begin{cases} 1, & \|n\| \le N_1 \\ 0, & \|n\| > N_1 \end{cases}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{\sin\big((2N_1+1)\pi\theta\big)}{\sin(\pi\theta)}$

Parsevalsche Beziehung für aperiodische zeitdiskrete Signale

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_0^1 |\hat{x}(\theta)|^2 \,\mathrm{d}\theta$$

Spektrum abgetasteter zeitkontinuierlicher Signale

Wird ein zeitkontinuierliches Signal $x_c(t)$ mit der Rate $\frac{1}{T}$ abgetastet, so gilt zwischen der zeitdiskreten Fouriertransformation des entstandenen zeitdiskreten Signals $x_d[n] = x_c(nT)$ und der Fouriertransformation des zeitkontinuierlichen Signals die Beziehung

$$\hat{x}_d(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}_c\left(\frac{\theta - k}{T}\right).$$

4 Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Merkregel: In den DFT-Formeln ist ein N-Punkte Signal stets als eine Periode eines periodischen zeitdiskreten Signals zu betrachten.

76.	$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k]\, e^{2\pi i k n/N}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi i k n/N}$
77.	$x[n - N_0]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi i k N_0/N}\, \hat{x}[k]$
78.	$e^{2\pi i k_0 n/N}\, x[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}[k - k_0]$
79.	$x^*[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}^*[-k]$
80.	$x^*[-n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}^*[k]$
81.	$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\, y[n-m]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}[k]\hat{y}[k]$
82.	$x[n]y[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \hat{x}[m]\hat{y}[k-m]$
83.	$x_e[n] = \frac{1}{2}\big(x[n] + x^*[-n]\big)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathfrak{Re}\{\hat{x}[k]\}$
84.	$x_o[n] = \frac{1}{2}\big(x[n] - x^*[-n]\big)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$i\mathfrak{Im}\{\hat{x}[k]\}$
85.	$\mathfrak{Re}\{x[n]\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}\big(\hat{x}[k] + \hat{x}^*[-k]\big)$
86.	$i\mathfrak{Im}\{x[n]\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}\big(\hat{x}[k] - \hat{x}^*[-k]\big)$

[3] Bei den Beziehungen ist die 1–Periodizität im Frequenzbereich zu berücksichtigen. Die Funktion $\delta[\cdot]$ ist der Einsimpuls für diskrete Argumente bzw. $\delta(\cdot)$ die Diracsche Deltafunktion für kontinuierliche Argumente.

Einige DFT Beispiele[4]

87.	$e^{2\pi i k_0 n/N}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$N\delta[k-k_0]$
88.	$\cos\left(\frac{2\pi k_0}{N}n\right)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{N}{2}(\delta[k+k_0-N]+\delta[k-k_0])$
89.	$\sin\left(\frac{2\pi k_0}{N}n\right)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{iN}{2}(\delta[k+k_0-N]-\delta[k-k_0])$
90.	$\delta[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	1
91.	$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N_1 \\ 1, & N-N_1 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{\sin\left((2N_1+1)\frac{\pi k}{N}\right)}{\sin\frac{\pi k}{N}}$

[4]In den Formeln gilt $0 \le n \le N-1$, $0 \le k \le N-1$ und $0 \le m \le N-1$.