1 Fouriertransformation zeitkontinuierlicher Signale

1.	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\, e^{2\pi i f t} \mathrm{d}f$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2\pi i f t} \mathrm{d}t$
2.	$x(t - t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi i f t_0} \hat{x}(f)$
3.	$e^{2\pi i f_0 t} x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(f - f_0)$
4.	$x^*(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}^*(-f)$
5.	$x(-t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(-f)$
6.	$x(at)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} \hat{x}\left(\frac{f}{a}\right)$
7.	$(x * y)(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(f)\hat{y}(f)$
8.	$x(t)y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(\hat{x} * \hat{y})(f)$
9.	$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(-t))$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathfrak{Re}\{\hat{x}(f)\}$
10.	$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x^*(-t))$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$i\mathfrak{Im}\{\hat{x}(f)\}$
11.	$\mathfrak{Re}\{x(t)\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}_e(f) = \frac{1}{2}(\hat{x}(f) + \hat{x}^*(-f))$
12.	$i\mathfrak{Im}\{x(t)\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}_o(f) = \frac{1}{2}(\hat{x}(f) - \hat{x}^*(-f))$
13.	$t^n x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \frac{\mathrm{d}^n \hat{x}(f)}{\mathrm{d}f^n}$
14.	$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(2\pi i f)^n \hat{x}(f)$
15.	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, \mathrm{d}\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2\pi i f}\hat{x}(f) + \frac{1}{2}\hat{x}(0)\delta(f)$

Einige Fouriertransformationspaare

16.	$\delta(t - t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi i f t_0}$
17.	$e^{2\pi i f_0 t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\delta(f - f_0)$
18.	$\cos(2\pi f_0 t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}\left(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right)$
19.	$\sin(2\pi f_0 t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{i}{2}\left(\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)\right)$
20.	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$
21.	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{2\pi i k t / T_0}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$

22.	$\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2\pi i f} + \frac{1}{2}\delta(f)$
23.	$\mathrm{sign}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\pi i f}$
24.	$e^{-at}\sigma(t), \quad \mathfrak{Re}\{a\} > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{a + 2\pi i f}$
25.	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-at}\sigma(t), \quad \mathfrak{Re}\{a\} > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{(a + 2\pi i f)^n}$
26.	$e^{-a\lvert t\rvert}, \quad \mathfrak{Re}\{a\} > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
27.	$\frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(f) = \begin{cases} 1, & \lvert f\rvert \le f_c \\ 0, & \lvert f\rvert > f_c \end{cases}$
28.	$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert \le T_0 \\ 0, & \lvert t\rvert > T_0 \end{cases}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\sin(2\pi T_0 f)}{\pi f}$
29.	$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\lvert t\rvert}{T_0}, & \lvert t\rvert \le T_0 \\ 0, & \lvert t\rvert > T_0 \end{cases}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\sin^2(\pi T_0 f)}{\pi^2 T_0 f^2}$
30.	$e^{-at^2}, \quad a > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\pi^2 f^2/a}$
31.	$\frac{\mathrm{d}^n \delta(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(2\pi i f)^n$
32.	t^n	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \frac{\mathrm{d}^n \delta(f)}{\mathrm{d}f^n}$
33.	$\lvert t\rvert$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$-\frac{1}{2\pi^2 f^2}$

Dualität der Fouriertransformation

Die folgenden Korrespondenzen sind äquivalent.

$$x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \hat{x}(f)$$

$$\hat{x}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad x(-f)$$

$$\hat{x}(-t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad x(f)$$

Plancherelsche Identität

$$\langle x, y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\, \hat{y}^*(f)\, df = \langle \hat{x}, \hat{y}\rangle$$

Parsevalsche Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert \hat{x}(f)\rvert^2 \mathrm{d}f$$

Poissonsche Summenformel ($T > 0$)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n/T) e^{2\pi i n t/T}$$

2 Fourierreihen zeitkont. periodischer Signale

34.	$x(t) = x(t+T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{2\pi ikt/T}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-2\pi ikt/T}\,\mathrm{d}t$
35.	$x(t-T_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi ikT_0/T} c_k$
36.	$e^{2\pi imt/T} x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	c_{k-m}
37.	$x^*(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	c^*_{-k}
38.	$x(-t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	c_{-k}
39.	$x(at), \quad a > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$c_k, \quad$ Periode $\frac{T}{a}$
40.	$\int_0^T x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$Tc_k d_k, \quad x,\, y$ gleiche Periode
41.	$x(t)y(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l\, d_{k-l}, \quad x,\, y$ gleiche Periode
42.	$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(-t))$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathfrak{Re}\{c_k\}$
43.	$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x^*(-t))$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$i\mathfrak{Im}\{c_k\}$
44.	$\mathfrak{Re}\{x(t)\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}(c_k + c^*_{-k})$
45.	$i\mathfrak{Im}\{x(t)\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}(c_k - c^*_{-k})$
46.	$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{2\pi ik}{T}\, c_k$
47.	$\int_{-\infty}^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ mit $c_0 = 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{T}{2\pi ik} c_k$

Einige Fourierreihen[1]

48.	$e^{2\pi it/T}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\delta[k-1]$
49.	$\cos\big(2\pi t/T\big)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}(\delta[k+1] + \delta[k-1])$
50.	$\sin\big(2\pi t/T\big)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{i}{2}(\delta[k+1] - \delta[k-1])$
51.	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{T} \quad \forall k$
52.	$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert \le T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t\rvert \le \frac{T}{2} \end{cases}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\sin\big(2\pi kT_1/T\big)}{\pi k}$
53.	$\big\lvert\cos\big(2\pi t/T\big)\big\rvert$ (Periode $\frac{T}{2}$)	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^k}{1-(2k)^2}$

[1] Die Funktion $\delta[\cdot]$ ist der Einsimpuls für diskrete Argumente bzw. $\delta(\cdot)$ die Diracsche Deltafunktion für kontinuierliche Argumente.

Plancherelsche Identität für periodische Signale $x, y \in L^2([0,T])$

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y^*(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^x (c_k^y)^*$$

Parsevalsche Beziehung für periodische Signale $x \in L^2([0,T])$

$$\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

3 Fouriertransformation zeitdiskreter Signale

54.	$x[n] = \int_0^1 \hat{x}(\theta)\, e^{2\pi i n\theta} \mathrm{d}\theta$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-2\pi i n\theta}$
55.	$x[n-N_0]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi i N_0 \theta}\hat{x}(\theta)$
56.	$e^{2\pi i n\theta_0} x[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(\theta-\theta_0)$
57.	$x^*[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}^*(-\theta)$
58.	$x[-n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(-\theta)$
59.	$(x*y)[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}(\theta)\hat{y}(\theta)$
60.	$x[n]y[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(\hat{x}*\hat{y})(\theta)$ (siehe [2])
61.	$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n]+x^*[-n])$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathfrak{Re}\{\hat{x}(\theta)\}$
62.	$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n]-x^*[-n])$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$i\mathfrak{Im}\{\hat{x}(\theta)\}$
63.	$\mathfrak{Re}\{x[n]\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}_e(\theta) = \frac{1}{2}(\hat{x}(\theta)+\hat{x}^*(\theta))$
64.	$i\mathfrak{Im}\{x[n]\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}_o(\theta) = \frac{1}{2}(\hat{x}(\theta)-\hat{x}^*(\theta))$
65.	$nx[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{i}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\hat{x}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$
66.	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-e^{-2\pi i\theta}}\hat{x}(\theta) + \frac{1}{2}\hat{x}(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\theta-k)$

[2] Bei dieser Faltung im periodischen Frequenzbereich handelt es sich um die *periodische Faltung*, definiert durch $(\hat{x}*\hat{y})(\theta) = \int_0^1 \hat{x}(\tau)\hat{y}(\theta-\tau)\mathrm{d}\tau$.

Einige Fouriertransformationen[3]

67.	$\delta[n-N_0]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi i N_0 \theta}$
68.	$e^{2\pi i \theta_0 n}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta-\theta_0-k)$
69.	$\cos(2\pi\theta_0 n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta+\theta_0-k)+\delta(\theta-\theta_0-k)\right)$
70.	$\sin(2\pi\theta_0 n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{i}{2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta+\theta_0-k)-\delta(\theta-\theta_0-k)\right)$
71.	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta-\frac{k}{N}\right)$
72.	$\sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-e^{-2\pi i\theta}}+\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta-k)$
73.	$a^n\sigma[n], \quad \lvert a\rvert<1$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-ae^{-2\pi i\theta}}$
74.	$\frac{\sin(2\pi n\alpha)}{\pi n}, \quad 0<\alpha<1/2$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\begin{cases}1, & \lvert\theta\rvert\le\alpha\\ 0, & \alpha<\lvert\theta\rvert\le 1/2\end{cases}$ (1-periodisch)
75.	$x[n]=\begin{cases}1, & \lvert n\rvert\le N_1\\ 0, & \lvert n\rvert>N_1\end{cases}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\sin\big((2N_1+1)\pi\theta\big)}{\sin(\pi\theta)}$

Parsevalsche Beziehung für aperiodische zeitdiskrete Signale

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_0^1 |\hat{x}(\theta)|^2 \,\mathrm{d}\theta$$

Spektrum abgetasteter zeitkontinuierlicher Signale

Wird ein zeitkontinuierliches Signal $x_c(t)$ mit der Rate $\frac{1}{T}$ abgetastet, so gilt zwischen der zeitdiskreten Fouriertransformation des entstandenen zeitdiskreten Signals $x_d[n] = x_c(nT)$ und der Fouriertransformation des zeitkontinuierlichen Signals die Beziehung

$$\hat{x}_d(\theta) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}_c\left(\frac{\theta-k}{T}\right).$$

Interpolationsformel

Für kritische Abtastung gilt die Interpolationsformel

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\frac{\sin(\frac{\pi}{T}(t-kT))}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}.$$

[3] Bei den Beziehungen ist die 1–Periodizität im Frequenzbereich zu berücksichtigen. Die Funktion $\delta[\cdot]$ ist der Einsimpuls für diskrete Argumente bzw. $\delta(\cdot)$ die Diracsche Deltafunktion für kontinuierliche Argumente.

4 Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Merkregel: In den DFT-Formeln ist ein N-Punkt Signal stets als eine Periode eines periodischen zeitdiskreten Signals zu betrachten.

76.	$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k]\, e^{2\pi ikn/N}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi ikn/N}$
77.	$x[n-N_0]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-2\pi ikN_0/N}\, \hat{x}[k]$
78.	$e^{2\pi ik_0 n/N}\, x[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}[k-k_0]$
79.	$x^*[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}^*[-k]$
80.	$x^*[-n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}^*[k]$
81.	$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\, y[n-m]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\hat{x}[k]\hat{y}[k]$
82.	$x[n]y[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \hat{x}[m]\hat{y}[k-m]$
83.	$x_e[n] = \frac{1}{2}\big(x[n] + x^*[-n]\big)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathfrak{Re}\{\hat{x}[k]\}$
84.	$x_o[n] = \frac{1}{2}\big(x[n] - x^*[-n]\big)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$i\mathfrak{Im}\{\hat{x}[k]\}$
85.	$\mathfrak{Re}\{x[n]\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}\big(\hat{x}[k] + \hat{x}^*[-k]\big)$
86.	$i\mathfrak{Im}\{x[n]\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}\big(\hat{x}[k] - \hat{x}^*[-k]\big)$

Einige DFT Beispiele[4]

87.	$e^{2\pi ik_0 n/N}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$N\delta[k-k_0]$
88.	$\cos\big(\frac{2\pi k_0}{N} n\big)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{N}{2}(\delta[k+k_0-N] + \delta[k-k_0])$
89.	$\sin\big(\frac{2\pi k_0}{N} n\big)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{iN}{2}(\delta[k+k_0-N] - \delta[k-k_0])$
90.	$\delta[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	1
91.	$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N_1 \\ 1, & N-N_1 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{\sin\big((2N_1+1)\frac{\pi k}{N}\big)}{\sin\frac{\pi k}{N}}$

[4] In den Formeln gilt $0 \le n \le N-1$, $0 \le k \le N-1$ und $0 \le m \le N-1$.

5 $\mathcal{Z}$–Transformation

$$x[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{n-1} dz \qquad \circ\!\!-\!\!\bullet \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Die in der Tabelle angegebenen Bereiche sind die Konvergenzringe der zweiseitigen $\mathcal{Z}$–Transformation und können in einzelnen Fällen auch grösser sein.

92.	$x[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(z)$	$R_{x_-} < \lvert z \rvert < R_{x_+}$
93.	$y[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$Y(z)$	$R_{y_-} < \lvert z \rvert < R_{y_+}$
94.	$ax[n] + by[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$a\,X(z) + b\,Y(z)$	$\max(R_{x_-}, R_{y_-}) < \lvert z \rvert < \min(R_{x_+}, R_{y_+})$
95.	$x[n + n_0]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$z^{n_0} X(z)$	$R_{x_-} < \lvert z \rvert < R_{x_+}$
96.	$z_0^n x[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$\lvert z_0 \rvert R_{x_-} < \lvert z \rvert < \lvert z_0 \rvert R_{x_+}$
97.	$nx[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$-z\,\frac{dX(z)}{dz}$	$R_{x_-} < \lvert z \rvert < R_{x_+}$
98.	$x^*[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X^*(z^*)$	$R_{x_-} < \lvert z \rvert < R_{x_+}$
99.	$x[-n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_{x_+}} < \lvert z \rvert < \frac{1}{R_{x_-}}$
100.	$\mathfrak{Re}\{x[n]\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}(X(z) + X^*(z^*))$	$R_{x_-} < \lvert z \rvert < R_{x_+}$
101.	$i\mathfrak{Im}\{x[n]\}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2}(X(z) - X^*(z^*))$	$R_{x_-} < \lvert z \rvert < R_{x_+}$
102.	$(x * y)[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(z)\,Y(z)$	$\max(R_{x_-}, R_{y_-}) < \lvert z \rvert < \min(R_{x_+}, R_{y_+})$
103.	$x[n]\,y[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{X(v)}{v}\, Y\left(\frac{z}{v}\right) dv$	$R_{x_-} R_{y_-} < \lvert z \rvert < R_{x_+} R_{y_+}$
104.	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}\, X(z)$	$\max(R_{x_-}, 1) < \lvert z \rvert < R_{x_+}$

Einige $\mathcal{Z}$–Transformationspaare

105.	$\delta[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	1	$\forall z$
106.	$\sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
107.	$-\sigma[-n-1]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert < 1$
108.	$\alpha^n\sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z}{z-\alpha}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
109.	$-\alpha^n\sigma[-n-1]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z}{z-\alpha}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
110.	$n\sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
111.	$-n\sigma[-n-1]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert < 1$
112.	$\sin(\alpha n)\ \sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z\sin(\alpha)}{z^2-2z\cos(\alpha)+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
113.	$\cos(\alpha n)\ \sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z(z-\cos(\alpha))}{z^2-2z\cos(\alpha)+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
114.	$\rho^n\sin(\alpha n)\ \sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{\rho z\sin(\alpha)}{z^2-2\rho z\cos(\alpha)+\rho^2}$	$\lvert z\rvert > \rho$
115.	$\rho^n\cos(\alpha n)\ \sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z(z-\rho\cos(\alpha))}{z^2-2\rho z\cos(\alpha)+\rho^2}$	$\lvert z\rvert > \rho$
116.	$\sin(\alpha n+\varphi)\ \sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{z^2\sin(\varphi)+z\sin(\alpha-\varphi)}{z^2-2z\cos(\alpha)+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
117.	$\dfrac{1}{n},\quad n>0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\log_e\left(\dfrac{z}{z-1}\right)$	$\lvert z\rvert > 1$
118.	$\dfrac{1-e^{-\alpha n}}{n}\ \sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\alpha+\log_e\left(\dfrac{z-e^{-\alpha}}{z-1}\right)$	$\lvert z\rvert > 1,\ \alpha>0$
119.	$\dfrac{\sin(\alpha n)}{n}\ \sigma[n]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\alpha+\arctan\left(\dfrac{\sin(\alpha)}{z-\cos(\alpha)}\right)$	$\lvert z\rvert > \cos(\alpha),\ \alpha>0$

Summenformel für die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} aq^k = \frac{a-aq^{n+1}}{1-q}.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}, \quad \text{für } |q|<1.$$

Erläuterung der Partialbruchzerlegung an Hand von Beispielen

Beispiel 1. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+2}{x^2+2x-3}\ .$$

Der Nenner lässt sich faktorisieren gemäss

$$g(x) = (x+3)(x-1).$$

Damit hat die Partialbruchzerlegung die Form

$$\frac{x+2}{x^2+2x-3} = \frac{A_1}{x+3} + \frac{A_2}{x-1}\ . \tag{1}$$

Multipliziert man nun beide Seiten von (1) mit $x+3$ und wertet das Ergebnis an der Stelle $x=-3$ aus, so erhält man

$$\left.\frac{(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+3)}\right|_{x=-3} = A_1 + \left.\frac{A_2(x+3)}{x-1}\right|_{x=-3},$$

was nach Vereinfachung $A_1 = 1/4$ ergibt. In ähnlicher Weise multiplizieren wir beide Seiten von (1) mit $x-1$ und werten für $x=1$ aus, um

$$\left.\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+3)}\right|_{x=1} = \left.\frac{A_1(x-1)}{x+3}\right|_{x=1} + A_2$$

zu erhalten. Daraus folgt $A_2 = 3/4$.

Beispiel 2. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x(x-1)(x+2)^2}\ .$$

In diesem Beispiel ist die Partialbruchzerlegung von der Form

$$\frac{1}{x(x-1)(x+2)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_{31}}{x+2} + \frac{A_{32}}{(x+2)^2}\ . \tag{2}$$

Um die Koeffizienten A_1 und A_2 zu berechnen, verwenden wir den gleichen Zugang wie in Beispiel 1: Durch Multiplikation beider Seiten von (2) mit x (und mit $x-1$, respektive) und Auswerten an der Stelle $x=0$ (bzw. $x=1$) erhalten wir $A_1 = -1/4$ (bzw. $A_2 = 1/9$). Nun berechnen wir A_{31} und A_{32}, indem wir zunächst beide Seiten von (2) mit $(x+2)^2$ multiplizieren:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A_1(x+2)^2}{x} + \frac{A_2(x+2)^2}{x-1} + A_{31}(x+2) + A_{32}. \tag{3}$$

Als nächstes werten wir (3) an der Stelle $x=-2$ aus, um die Terme mit A_1, A_2 und A_{31} auf der rechten Seite zu eliminieren und erhalten damit $A_{32} = 1/6$. Den Koeffizienten A_{31} kann man durch Differenzieren beider Seiten von (3) und Auswerten des Resultates an der Stelle $x=-2$ wie folgt ermitteln. Die linke Seite ergibt

$$\left.\frac{d}{dx}\frac{1}{x(x-1)}\right|_{x=-2} = -\left.\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}\right|_{x=-2} = \frac{5}{36}.$$

Die ersten beiden Terme auf der rechten Seite von (3) evaluieren, nach dem Differenzieren, an der Stelle $x = -2$ zu 0. Die letzten beiden Terme sind

$$\frac{d}{dx} A_{31}(x+2) = A_{31}$$
$$\frac{d}{dx} A_{32} = 0.$$

Somit erhalten wir $A_{31} = 5/36$.

Beispiel 3. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^6 + 4x^4 + 4x^2 - 2x + 1}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1} \ .$$

Der Grad des Zählers $f(x)$ ist höher als der des Nenners $g(x)$. Daher zerlegen wir $f(x)/g(x)$ zuerst in die Summe eines Polynoms und einer rationalen Funktion, deren Zähler einen niedrigeren Grad aufweist als der Nenner, und zwar gemäss

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x + 1 + \frac{3x^4 + 5x^2 - 2x + 2}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1} \ .$$

Wir fahren fort mit der Partialbruchzerlegung von

$$\frac{\widetilde{f}(x)}{\widetilde{g}(x)} := \frac{3x^4 + 5x^2 - 2x + 2}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1} \ .$$

Der Nenner kann wie folgt faktorisiert werden:

$$\widetilde{g}(x) = (x-1)(x^2+1)^2.$$

Im Allgemeinen, wenn der Nenner in wiederholte lineare Faktoren und wiederholte quadratische Faktoren zerlegt werden kann, gemäss

$$\widetilde{g}(x) = (x-a_1)^{j_1} \cdots (x-a_m)^{j_m} (x^2 + b_1 x + c_1)^{k_1} \cdots (x^2 + b_n x + c_n)^{k_n},$$

mit $m, n, j_1, \ldots, j_m, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, ist die Partialbruchzerlegung gegeben durch

$$\frac{\widetilde{f}(x)}{\widetilde{g}(x)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{j_i} \frac{A_{ir}}{(x-a_i)^r} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{k_i} \frac{B_{ir}x + C_{ir}}{(x^2 + b_i x + c_i)^r}.$$

Somit ist die Partialbruchzerlegung hier von der Form

$$\frac{\widetilde{f}(x)}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+1} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+1)^2}. \tag{4}$$

Multiplikation beider Seiten von (4) mit $\widetilde{g}(x)$ liefert

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(x) &= A(x^2+1)^2 + (B_1 x + C_1)(x-1)(x^2+1) + (B_2 x + C_2)(x-1) \\ &= (A + B_1)x^4 + (-B_1 + C_1)x^3 + (2A + B_1 - C_1 + B_2)x^2 + (C_1 + C_2 - B_2 - B_1)x \\ &\qquad + A - C_1 - C_2.\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir daraus das Gleichungssystem

$$\begin{cases} A + B_1 = 3 \\ -B_1 + C_1 = 0 \\ 2A + B_1 - C_1 + B_2 = 5 \\ C_1 + C_2 - B_2 - B_1 = -2 \\ A - C_1 - C_2 = 2 \end{cases}$$

mit der Lösung

$$\begin{cases} A = 2 \\ B_1 = 1 \\ C_1 = 1 \\ B_2 = 1 \\ C_2 = -1 \end{cases} .$$