Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik

Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
20. Januar 2015

Bitte beachten Sie:

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung erlaubt sind die Transformationstabellen, die Sie von uns erhalten. Die Benutzung von Rechnern/Smartphones/Tablets jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Aufgabenteile, die mit einem ★ gekennzeichnet sind, können unabhängig von vorhergehenden Aufgabenteilen gelöst werden.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen Sie darauf hin, dass Studierende bei unehrlichem Handeln während der Prüfung den Strafnormen der Disziplinarordnung RSETHZ 361.1 der ETHZ unterstehen.

Vor der Klausur:

1. Dieses Angabenheft hat 7 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen ausschliesslich auf die bereitgestellten leeren Blätter. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie weitere Blätter.

Nach der Klausur:

5. Nummerieren Sie die Lösungsblätter und beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen. Tragen Sie die Anzahl der Lösungsblätter, die Sie abgeben möchten, auf dieser Seite unten ein und unterschreiben Sie. Alle Aufgabenblätter müssen abgegeben werden.

Nachname: .... Vorname: ....

Legi-Nr.: ....

Anzahl abgegebener Lösungsblätter: ....

Unterschrift: ....

1. **Aufgabe** (15 Punkte) Wir betrachten das folgende zeitdiskrete periodische Signal

$$x[n] := \cos(\pi n/4)\sin(\pi n/2).$$

★ (a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Periodendauer von $x[n]$, das heisst das minimale $N \in \mathbb{N}$ für das gilt $x[n] = x[n+N]$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(b) (6 Punkte) Berechnen Sie die diskrete Fouriertransformierte (DFT) der Werte über eine Grundperiode von $x[n]$, das heisst,

$$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi ikn/N}, \quad \text{für } k = 0, ..., N-1.$$

★ (c) (7 Punkte) Nun setzen wir $y[n] := (x[n])^2$. Ist das zeitdiskrete Signal $y[n]$ periodisch? (Begründen Sie Ihre Antwort.) Falls ja, so bestimmen Sie die zugehörige Periodendauer und die DFT der Werte von $y[n]$ über eine Grundperiode.

2. **Aufgabe** (32 Punkte)

In dieser Aufgabe sei $x(t)$ ein bandbegrenztes Signal mit Bandbreite $f_B > 0$, das heisst $\hat{x}(f) = 0$ für alle f mit $|f| > f_B$. Das Signal wird mit einer Periode $T > 0$ abgetastet. Durch einen fehlerhaften Abtastmechanismus sind die Abtastzeitpunkte um t_0 verschoben, das heisst die Abtastwerte werden an den Stellen $t_0 + nT$, $n \in \mathbb{Z}$, für ein festes $t_0 \in \mathbb{R}$ genommen.

★ (a) (5 Punkte) Wie muss T gewählt werden, damit für beliebiges $t_0 \in \mathbb{R}$ das Signal $x(t)$ eindeutig durch die Abtastwerte $x(t_0+nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, charakterisiert ist?

Um den Einfluss der Zeitverschiebung t_0 auf das Spektrum des abgetasteten Signals zu beschreiben, definieren wir die "Zak-Transformation" von $x(t)$ durch

$$\mathcal{Z}_x(t_0, f) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_0 + kT)e^{-2\pi ikTf},$$

wobei $f \in \mathbb{R}$.

★ (b) (5 Punkte) Zeigen Sie die folgenden beiden Verschiebungseigenschaften der Zak-Transformation:

i. $\mathcal{Z}_x(t_0 + T, f) = e^{2\pi iTf}\mathcal{Z}_x(t_0, f)$

ii. $\mathcal{Z}_x\left(t_0, f + \frac{1}{T}\right) = \mathcal{Z}_x(t_0, f)$

★ (c) (7 Punkte) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Beziehung für beliebige $t_0, f \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{Z}_x(t_0, f) = \frac{1}{T}e^{2\pi it_0 f} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f + \frac{k}{T}\right) e^{2\pi ikt_0/T}. \tag{1}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Poissonsche Summenformel.

★ (d) (6 Punkte) Zeigen Sie die folgenden beiden Inversionseigenschaften der Zak-Transformation:

i. $x(t_0) = T\int_0^{1/T} \mathcal{Z}_x(t_0, f)\mathrm{d}f$

ii. $\hat{x}(f) = \int_0^T \mathcal{Z}_x(t_0, f)e^{-2\pi it_0 f}\mathrm{d}t_0$

★ (e) (9 Punkte) Nun sei T so gewählt, dass die Abtastrate $1/T$ kritischer Abtastung entspricht. Leiten Sie eine Interpolationsformel her, die für beliebiges $t_0 \in \mathbb{R}$ das Signal $x(t)$ aus seinen Abtastwerten $x(t_0 + nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, rekonstruiert.

Hinweis: Nehmen Sie (1) *als Ausgangspunkt.*

Erinnerung: Die Interpolationsformel für "gewöhnliche" Abtastung lautet

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t - kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t - kT)}.$$

3. **Aufgabe** (21 Punkte) In vielen Bereichen der Signalverarbeitung, etwa dem *compressed sensing*, spielen dünn besetzte Signale (engl. *sparse signals*) endlicher Länge eine grosse Rolle. Ein dünn besetztes Signal ist ein N-Punkt Signal $(x[0], ..., x[N-1])$, bei dem eine grosse Anzahl der Werte gleich Null ist. Die beiden Transformationspaare zur diskreten Fouriertransformation (DFT)

$$\begin{array}{ccc} \delta[n] & \circ\!\!-\!\!\bullet & 1 \\ 1 & \circ\!\!-\!\!\bullet & N \cdot \delta[k] \end{array}$$

zeigen, dass Signale, die im Zeit- oder Frequenzbereich dünn besetzt sind, im Allgemeinen im jeweils anderen Bereich nicht dünn besetzt sind. Die folgende Aufgabe untersucht ein spezielles N-Punkt Signal, das sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich dünn besetzt ist.

Es sei im Folgenden $N = L^2$ für ein $L \in \mathbb{N}$. Ferner sei das N-Punkt Signal $x[n]$ gegeben durch

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = rL \text{ für ein } r \in \{0, 1, 2, \dots, L-1\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2}$$

★ (a) (4 Punkte) Skizzieren Sie das N-Punkt Signal $x[n]$ für $n = 0, 1, \dots, N-1$ für den Fall $N = 16$. *Achten Sie auf die Beschriftung der Achsen*!

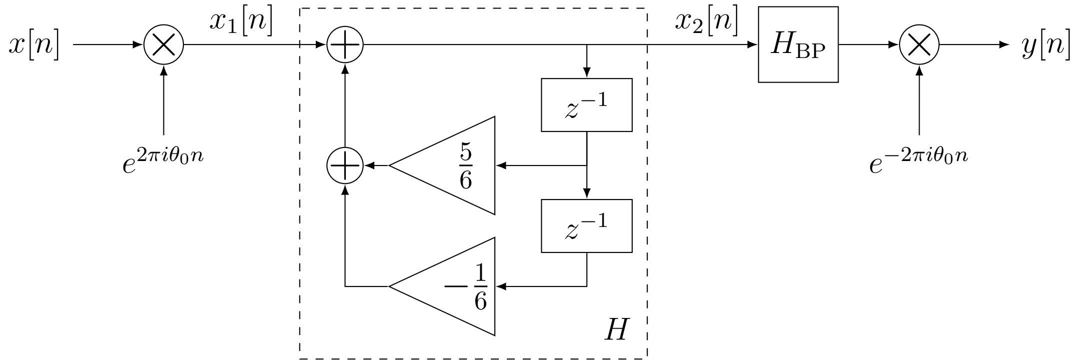
★ (b) (7 Punkte) Berechnen Sie die expliziten Werte der DFT $\hat{x}[k]$ des N-Punkt Signals $x[n]$ für den Fall $N = 16$.

Wir nennen ein N-Punkt Signal $x[n]$ *r-dünn besetzt* (engl. *r-sparse*), wenn $x[n]$ genau an r Zeitpunkten einen von Null verschiedenen Wert annimmt.

★ (c) (2 Punkte) Nun betrachten wir eine beliebige Länge N, so dass $N = L^2$ mit $L \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Grad der Dünnbesetztheit r des N-Punkt Signals $x[n]$ in (2) in Abhängigkeit von N.

(d) (8 Punkte) Es sei wieder N eine beliebige Länge, so dass $N = L^2$ mit $L \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die N-Punkt DFT $\hat{x}[k]$ des Signals $x[n]$ in (2) genauso dünn besetzt ist wie das Zeitsignal $x[n]$, das heisst der Grad der Dünnbesetztheit r_x des Signals $x[n]$ stimmt überein mit dem Grad der Dünnbesetztheit $r_{\hat{x}}$ des Signals $\hat{x}[k]$.

4. **Aufgabe** (19 Punkte) Wir untersuchen ein zeitdiskretes System, das durch folgendes Blockschaltbild charakterisiert ist:



Hierbei ist das eingerahmte System H ein kausales LTI-System und die 1-periodische Übertragungsfunktion $\hat{h}_{\text{BP}}(\theta)$ des LTI-Systems H_{BP} ist für $\theta \in [0, 1)$ durch

$$\hat{h}_{\text{BP}}(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \theta \in [1/3, 2/3] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

★ (a) (3 Punkte) Wie lautet die Differenzengleichung, die das eingerahmte System H beschreibt?

(b) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort und die Übertragungsfunktion des eingerahmten Systems H.

(c) (3 Punkte) Ist das eingerahmte System H BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Es gilt die Summenformel $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1/(1-q)$, *für* $|q| < 1$.

(d) (7 Punkte) Wir betrachten nun das konkrete Eingangssignal $x[n] = 3e^{\pi i n/2}$. Bestimmen Sie das zugehörige Ausgangssignal $y[n]$ des Gesamtsystems für

i. $\theta_0 = 1/4$

ii. $\theta_0 = 1/2$.

5. **Aufgabe** (13 Punkte)

Wir betrachten ein beliebiges zeitkontinuierliches Signal $x(t)$, das durch $f_B > 0$ bandbegrenzt ist, das heisst $\hat{x}(f) = 0$ für alle f mit $|f| > f_B$. Die Funktion eines idealen A/D-Wandlers ist, auf das Eingangssignal $x(t)$ mit dem zeitdiskreten Ausgangssignal $x_{\text{ideal}}[n] = x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, zu antworten. Nun untersuchen wir stattdessen ein Modell für einen nicht-idealen A/D-Wandler, der gegeben ist durch die Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$x[n] := \int_{(n-1)T}^{nT} x(t) \mathrm{d}t, \tag{3}$$

wobei $T := 1/(2f_B)$. Das Ziel in dieser Aufgabe ist es das Signal $x(t)$ aus den durch (3) gegebenen "Abtastwerten" $x[n]$ zu rekonstruieren.

★ (a) (3 Punkte) Geben Sie ein Signal $h(t)$ an, sodass die in (3) gegebenen Abtastwerte $x[n]$ geschrieben werden können als $x[n] = (x * h)(nT)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

★ (b) (3 Punkte) Für $h(t)$ aus Teilaufgabe (a), betrachten Sie nun $x_h(t) := (x * h)(t)$ und geben Sie eine Formel an, um $x_h(t)$ aus den durch (3) gegebenen Abtastwerten $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, zu rekonstruieren.

(c) (7 Punkte) Geben Sie einen Ausdruck für die Fouriertransformierte $\hat{h}(f)$ von $h(t)$ aus Teilaufgabe (a) an und erklären Sie wie das Signal $x(t)$ aus den durch (3) gegebenen Abtastwerten $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, rekonstruiert werden kann.

Hinweis: Die Angabe einer geschlossenen Formel zur Berechnung von $x(t)$ aus den Werten $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, ist nicht erforderlich. Sie sollten lediglich die Prozedur beschreiben.