Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
5. August 2015

Bitte beachten Sie:

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung erlaubt sind die Transformationstabellen, die Sie von uns erhalten. Die Benutzung von Rechnern/Smartphones/Tablets jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Aufgabenteile, die mit einem ★ gekennzeichnet sind, können unabhängig von vorhergehenden Aufgabenteilen gelöst werden.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen Sie darauf hin, dass Studierende bei unehrlichem Handeln während der Prüfung den Strafnormen der Disziplinarordnung RSETHZ 361.1 der ETHZ unterstehen.

Vor der Klausur:

1. Dieses Angabenheft hat 8 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen ausschliesslich auf die bereitgestellten leeren Blätter. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie weitere Blätter.

Nach der Klausur:

5. Nummerieren Sie die Lösungsblätter und beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen. Tragen Sie die Anzahl der Lösungsblätter (exklusive der Aufgabenblätter), die Sie abgeben möchten, auf dieser Seite unten ein und unterschreiben Sie. Alle Aufgabenblätter müssen abgegeben werden.

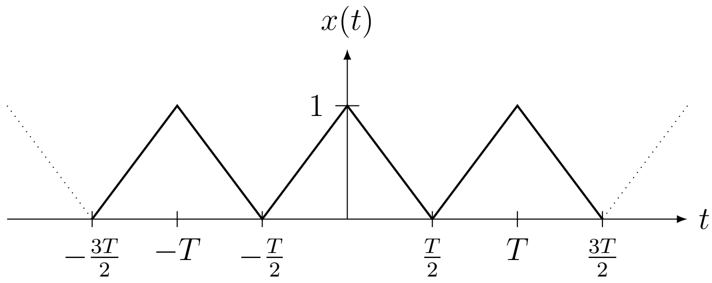
Nachname: .... Vorname: ....

Legi-Nr.: ....

Anzahl abgegebener Lösungsblätter: ....

Unterschrift: ....

1. **Aufgabe** (26 Punkte) Wir betrachten das zeitkontinuierliche, T-periodische Signal $x(t)$, welches im Bereich $-3T/2 \leq t \leq 3T/2$ durch folgendes Diagramm dargestellt ist:



Ziel dieser Aufgabe ist die Entwicklung von $x(t)$ in eine Fourierreihe und das Ermitteln der Signalenergie. Ferner soll untersucht werden wie sich eine Störung des Signals $x(t)$ auf die Fourierreihenkoeffizienten von $x(t)$ auswirkt.

★ (a) (3 Punkte) Bestimmen Sie ein zeitkontinuierliches Signal $g(t)$, so dass

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - kT).$$

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie unter Verwendung der Poissonschen Summenformel die Fourierreihenkoeffizienten c_k, $k \in \mathbb{Z}$, des T-periodischen Signals $x(t)$.

★ (c) (4 Punkte) Berechnen Sie die Signalenergie

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

(d) (4 Punkte) Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Betrachten Sie nun das zeitkontinuierliche Signal

$$y(t) = x(t) + \varepsilon,$$

welches als gestörte Version des Signals $x(t)$ verstanden werden kann. Zeigen Sie, dass $y(t)$ ein T-periodisches Signal ist. Berechnen Sie ferner die zugehörigen Fourierreihenkoeffizienten d_k, $k \in \mathbb{Z}$.

(e) (10 Punkte) Betrachten Sie nun das zeitkontinuierliche Signal

$$z(t) = |y(t)| = |x(t) + \varepsilon|.$$

Zeigen Sie, dass $z(t)$ periodisch ist und bestimmen Sie die (minimale) Periode sowie die zugehörigen Fourierreihenkoeffizienten e_k, $k \in \mathbb{Z}$, für die Fälle

- $\varepsilon > 0$
- $\varepsilon < -1$
- $\varepsilon = -1/2$.

2. **Aufgabe** (18 Punkte) Die schnelle Approximation von Zeitsignalen aus einer endlichen Anzahl an Abtastwerten ihrer Fouriertransformierten spielt in vielen Bereichen der Signalverarbeitung (z.B., in der Magnetresonanztomographie) eine grosse Rolle. Im Folgenden wollen wir ein Verfahren untersuchen, welches ein unbekanntes Zeitsignal aus einer endlichen Anzahl an Abtastwerten seiner Fouriertransformierten approximiert.

   Es sei $x(t)$ ein unbekanntes zeitkontinuierliches Signal, von welchem wir eine endliche Anzahl an Abtastwerten seiner Fouriertransformierten kennen, d.h., $\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$, $y_n \in \mathbb{C}$, mit

$$y_n = \widehat{x}(f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f_n t} \mathrm{d}t. \tag{1}$$

   Die Abtastpunkte $\{f_n\}_{n=0}^{N-1}$, $f_n \in \mathbb{R}$, sind vorgegeben und müssen nicht notwendigerweise auf einem Gitter liegen. Wir besitzen ferner Strukturinformation zum unbekannten Signal $x(t)$ und wissen, dass sich $x(t)$ gut in der Form

$$x_a(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j g(t - t_j) \tag{2}$$

   approximieren lässt, wobei das zeitkontinuierliche Signal $g(t)$ sowie die Approximationspunkte $\{t_j\}_{j=0}^{N-1}$, $t_j \in \mathbb{R}$, vorgegeben sind. Die Approximation des unbekannten Signals $x(t)$ unter Verwendung der Strukturinformation (2) läuft damit auf die Bestimmung der unbekannten Koeffizienten $\{\alpha_j\}_{j=0}^{N-1}$ aus den Abtastwerten $\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$ hinaus.

★ (a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{x}_a(f)$ der Approximation $x_a(t)$ aus (2).

(b) (4 Punkte) Nehmen Sie an, dass die Approximation $x_a(t)$ die Fouriertransformierte des unbekannten Signals $x(t)$ an den Abtastpunkten $\{f_n\}_{n=0}^{N-1}$ perfekt nachbildet, d.h., es gilt

$$\widehat{x}_a(f_n) = \widehat{x}(f_n),$$

   für $n = 0, \dots, N-1$.

   Bestimmen Sie eine Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{N \times N}$, sodass

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{y}, \tag{3}$$

   wobei $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix}\alpha_0 \; \alpha_1 \; \dots \; \alpha_{N-1}\end{pmatrix}^T \in \mathbb{C}^N$ der Vektor ist, dessen Einträge die Koeffizienten $\{\alpha_j\}_{j=0}^{N-1}$ in (2) sind, und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix}y_0 \; y_1 \; \dots \; y_{N-1}\end{pmatrix}^T \in \mathbb{C}^N$ ist der Vektor, dessen Einträge die Abtastwerte $\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$ in (1) sind.

Nehmen Sie für die folgenden Teilaufgaben an, dass $g(t) = \delta(t)$.

(c) (8 Punkte) Wir möchten ein Verfahren entwickeln, welches das Gleichungssystem (3) in $\mathcal{O}(N \log(N))$ arithmetischen Operationen löst. Die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zweier komplexer Zahlen zählen wir dabei jeweils als eine arithmetische Operation. Beschreiben Sie das Verfahren und geben Sie Bedingungen an die Abstastpunkte $\{f_n\}_{n=0}^{N-1}$ und an die Approximationspunkte $\{t_j\}_{j=0}^{N-1}$ an, welche für die Anwendung dieses Verfahrens erfüllt sein müssen.

(d) (3 Punkte) Das unbekannte Signal $x(t)$ soll nun auf einem regulären Gitter approximiert werden, d.h., wir nehmen an, dass die Approximation $x_a(t)$ von der Form

$$x_a(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j g(t-j) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j \delta(t-j)$$

ist, wobei $N \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl ist. Ferner werden die Abtastwerte $\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$ an den Stellen $f_n = n$, für $n = 0, \ldots, N-1$, genommen. Kann das Verfahren aus Teilaufgabe (c) verwendet werden, um das Gleichungssytem (3) in $\mathcal{O}(N \log(N))$ arithmetischen Operationen zu lösen? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. **Aufgabe** (21 Punkte)

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns damit ob ein unbekanntes zeitkontinuierliches Signal $x(t)$ aus seinen Abtastwerten $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, rekonstruiert werden kann, wenn bekannt ist, dass $x(t)$ folgende Struktur hat:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varphi(t - nT).$$

Hierbei ist $\varphi(t)$ ein bekanntes Signal, $T > 0$ eine bekannte Abtastperiode und a_n, $n \in \mathbb{Z}$, sind unbekannte Koeffizienten, die es gilt aus den Abtastwerten $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, zu ermitteln.

★ (a) (3 Punkte) Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Fouriertransformierte $\hat{x}(f)$ von $x(t)$.

★ (b) (3 Punkte) Betrachten Sie nun das bandbegrenzte Signal

$$\varphi(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}.$$

Ist es möglich $x(t)$ aus seinen Abtastwerten $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, zu rekonstruieren? *Falls "ja", erklären Sie wie; falls "nein" geben Sie ein Gegenbeispiel an.*

(c) (4 Punkte) Betrachten Sie nun das nicht-bandbegrenzte Signal

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T. \end{cases}$$

Ist es möglich $x(t)$ für jede beliebige Folge a_n, $n \in \mathbb{Z}$, aus seinen Abtastwerten $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, zu rekonstruieren?

Falls "ja", erklären Sie wie; falls "nein", geben Sie ein Gegenbeispiel an.

★ (d) (7 Punkte) Wir sagen, dass $\varphi(t)$ das Nyquist-Kriterium erfüllt, wenn

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}\left(f - \frac{k}{T}\right) = 1, \quad \text{für alle } f \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass die Erfüllung des Nyquist-Kriteriums garantiert, dass

$$\varphi(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

und damit perfekte Rekonstruktion von $x(t)$ aus seinen Abtastwerten $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, ermöglicht.

Hinweis: Die Poissonsche Summenformel könnte hilfreich sein.

★ (e) (4 Punkte) Überprüfen Sie für $\varphi(t)$ aus Teilaufgabe (b) ob das Nyquist-Kriterium erfüllt ist.

4. **Aufgabe** (22 Punkte) Betrachten Sie ein zeitdiskretes LTI-System H, das durch die Übertragungsfunktion

$$\hat{h}(\theta) = \frac{e^{2\pi i\theta} + \frac{1}{2}}{e^{4\pi i\theta} - \alpha e^{2\pi i\theta}}$$

charakterisiert ist, wobei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine unbestimmte Konstante mit $|\alpha| < 1$ ist.

★ (a) (4 Punkte) Geben Sie eine Differenzengleichung an, die das System im Zeitbereich beschreibt.

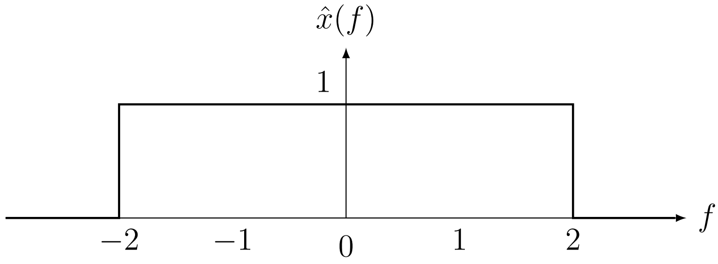
(b) (5 Punkte) Entwerfen Sie ein Blockschaltbild für das System H bestehend aus
- Addierern,
- Multiplizierern mit Konstanten,
- Zeitverzögerungselementen.

★ (c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h[n]$ des Systems H.

(d) (4 Punkte) Ist das System H BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ (e) (5 Punkte) Nun sei $\alpha = 1/2$. Geben Sie ein Eingangssignal $x[n]$ an, sodass $(Hx)[n] = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

5. **Aufgabe** (13 Punkte) Wir betrachten ein Signal $x(t)$, dessen Spektrum sich aus der folgenden Skizze ablesen lässt.



Um eine Abtastung des Signals $x(t)$ mit der Abtastperiode $T = 1/3$ zu modellieren, bilden wir das Signal

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT).$$

★ (a) (5 Punkte) Skizzieren Sie den Graphen der Fouriertransformierten $\hat{y}(f)$ von $y(t)$ im Bereich $-5 \leq f \leq 5$. *Achten Sie auf die Beschriftung der Achsen!*

★ (b) (2 Punkte) Ist die Abtastrate $1/T$ mit $T = 1/3$ kleiner, gleich oder grösser als die Nyquistrate des Signals $x(t)$? Was bedeutet das in Bezug auf die Rekonstruierbarkeit von $x(t)$ aus $y(t)$?

(c) (6 Punkte) Das Signal $y(t)$ wird nun gefiltert gemäss $z(t) := (y * h_{\text{TP}})(t)$, wobei

$$\hat{h}_{\text{TP}}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq 2 \\ 0, & |f| > 2. \end{cases}$$

Berechnen Sie $z(t)$.