ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Lösung zur
Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
5. August 2015

1. **Aufgabe**

(a) Wir definieren das zeitkontinuierliche Signal

$$g(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2|t|}{T}, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

Damit gilt $x(t) = g(t)$ für $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$, und somit

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - kT). \tag{2}$$

(b) Mit Hilfe der Poissonschen Summenformel und Gleichung (2) aus der vorherigen Teilaufgabe ergibt sich

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t-kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(k/T)\, e^{2\pi i k t/T} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{T}\widehat{g}(k/T)}_{=c_k} e^{2\pi i k t/T}. \end{aligned}$$

Die Fouriertransformierte $\widehat{g}(f)$ von $g(t)$ ergibt sich aus der Formelsammlung zu

$$\widehat{g}(f) = 2\frac{\sin^2(\pi T f/2)}{\pi^2 T f^2}.$$

Somit erhält man für die gesuchten Fourierreihenkoeffizienten:

$$c_k = \frac{1}{T}\widehat{g}(k/T) = \frac{2}{\pi^2 k^2} \sin^2(k\pi/2)\,.$$

(c) Mit Hilfe der Parsevalschen Beziehung für periodische Signale erhält man

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie von $x(t)$ lässt sich dieses Integral gemäss

$$\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

schreiben. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
E &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \left(1 - \frac{2t}{T}\right)^2 \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \left(1 - \frac{4t}{T} + \frac{4t^2}{T^2}\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T}\left[t - \frac{2t^2}{T} + \frac{4t^3}{3T^2}\right]_{t=0}^{t=T/2} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

(d) Das Signal $y(t)$ ist T-periodisch, da $y(t+T) = x(t+T) + \varepsilon = x(t) + \varepsilon = y(t)$, für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, wobei wir die T-Periodizität von $x(t)$ verwendet haben. Wir berechnen zunächst die Fourierreihenkoeffizienten w_k, $k \in \mathbb{Z}$, des konstanten Signals $w(t) := \varepsilon$. Dieses Signal ist offenbar T-periodisch. Für $k \in \mathbb{Z}$ und $k \neq 0$ erhalten wir

$$w_k = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon e^{-2\pi i k t/T} \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{T}\left[\frac{e^{-2\pi i k t/T}}{-2\pi i k/T}\right]_{t=0}^{t=T} = \frac{\varepsilon}{T}\left[\frac{1-1}{-2\pi i k/T}\right] = 0.$$

Für $k = 0$ gilt

$$w_k = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon \mathrm{d}t = \varepsilon,$$

und somit erhalten wir zusammenfassend $w_k = \varepsilon\delta[k]$. Da die beiden Signale $x(t)$ und $w(t) = \varepsilon$ die gleiche Periode haben, nämlich T, können wir die Fourierreihenkoeffizienten d_k von $y(t) = x(t) + w(t) = x(t) + \varepsilon$ als Summe von c_k und w_k berechnen, das heisst

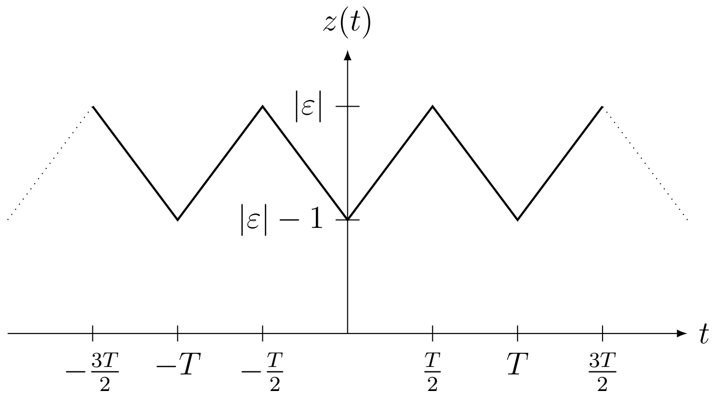
$$d_k = c_k + \varepsilon\delta[k],$$

wobei c_k, $k \in \mathbb{Z}$, die Fourierreihenkoeffizienten des T-periodischen Signals $x(t)$ aus Teilaufgabe (b) sind.

(e)
- Für $\varepsilon > 0$ gilt $z(t) = |y(t)| = |x(t) + \varepsilon| = x(t) + \varepsilon = y(t)$ und somit hat $z(t)$ die Periode T und es gilt

  $$e_k = d_k = c_k + \varepsilon\delta[k],$$

  wobei c_k, $k \in \mathbb{Z}$, die Fourierreihenkoeffizienten des T-periodischen Signals $x(t)$ aus Teilaufgabe (b) und d_k, $k \in \mathbb{Z}$, die Fourierreihenkoeffizienten des T-periodischen Signals $y(t)$ aus Teilaufgabe (d) sind.
- Für $\varepsilon < -1$ hat $z(t)$ folgende Gestalt:



Dieses Signal hat Periode T und lässt sich folgendermassen ausdrücken:

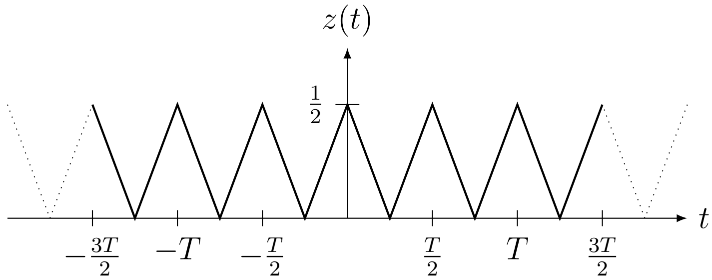
$$z(t) = |\varepsilon| - x(t).$$

Da das konstante Signal $|\varepsilon|$ und das Signal $x(t)$ beide T-periodisch sind, können wir e_k als Differenz der zugehörigen Fourierreihenkoeffizienten berechnen. Wir erhalten somit

$$e_k = |\varepsilon|\delta[k] - c_k,$$

wobei c_k, $k \in \mathbb{Z}$, die Fourierreihenkoeffizienten des T-periodischen Signals $x(t)$ aus Teilaufgabe (b) sind.

- Für $\varepsilon = -1/2$ hat $z(t)$ folgende Gestalt:



Wir erkennen, dass in diesem Fall $z(t)$ lediglich eine in Zeit und Amplitude skalierte Version von $x(t)$ ist:

$$z(t) = \frac{1}{2}x(2t).$$

Aus der Formelsammlung erhalten wir somit, dass die Fourierreihenkoeffizienten des $T/2$-periodischen Signals $z(t)$ gegeben sind durch

$$e_k = \frac{1}{2}c_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}\sin^2(k\pi/2)\,.$$

2. **Aufgabe**

(a) Mit Hilfe der Definition der Fouriertransformation und der Formelsammlung folgt

$$\widehat{x}_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-2\pi i f t} \mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j \int_{-\infty}^{\infty} g(t-t_j) e^{-2\pi i f t} \mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j e^{-2\pi i f t_j} \widehat{g}(f).$$

(b) Da nach Voraussetzung

$$\widehat{x}_a(f_n) = \widehat{x}(f_n) = y_n$$

für $n = 0, \ldots, N-1$, folgt

$$y_n = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j e^{-2\pi i f_n t_j} \widehat{g}(f_n). \tag{3}$$

Wir definieren die Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ mit den Komponenten $\mathbf{M}_{n,k}$ als

$$\mathbf{M}_{n,k} = e^{-2\pi i f_n t_k} \widehat{g}(f_n)$$

für $n = 0, \ldots, N-1$, $k = 0, \ldots, N-1$. Somit gilt mit Hilfe von (3)

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{y}. \tag{4}$$

(c) Wir lösen das Gleichungssystem (4) mit Hilfe der schnellen Fouriertransformation (FFT). Dazu stellen wir Bedingungen auf, sodass die Matrix $\mathbf{M}$ eine DFT-Matrix ist. Konkret nehmen wir an, dass die Anzahl N der Abtastpunkte eine Zweierpotenz ist, d.h., $N = 2^L$ für ein $L \in \mathbb{N}$. Dies ist nötig, damit das in der Vorlesung vorgestellte *decimation-in-time*-Schema für die FFT funktioniert. Ferner stellen wir folgende Bedingung an Abtast- und Approximationspunkte:

$$f_n t_k = nk/N, \tag{5}$$

für $n = 0, \ldots, N-1$, $k = 0, \ldots, N-1$. Zum Beispiel erfüllen die Abtast- und Approximationspunkte

$$f_n = n/\sqrt{N}, \quad t_k = k/\sqrt{N},$$

für $n = 0, \ldots, N-1$, $k = 0, \ldots, N-1$, die Bedingung (5). Damit ist die Matrix $\mathbf{M}$ mit den Komponenten

$$\mathbf{M}_{n,k} = e^{-2\pi i f_n t_k} \widehat{g}(f_n) = e^{-2\pi i nk/N}$$

die $N \times N$ DFT-Matrix $\mathbf{F}_N$, wobei wir verwendet haben, dass $\widehat{g}(f_n) = \widehat{\delta}(f_n) = 1$, für $n = 0, \ldots, N-1$. Der Koeffizientenvektor $\boldsymbol{\alpha}$ wird nun mittels

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} = (\mathbf{F}_N)^{-1}\mathbf{y} = \frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H \mathbf{y}$$

bestimmt, wobei man die Matrix-Vektor Multiplikation $\frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H\mathbf{y}$ mit Hilfe der FFT in $\mathcal{O}(N\log(N))$ Operationen berechnen kann.

(d) Es muss, wie im Lösungsweg der Teilaufgabe (c) beschrieben,

$$f_n t_k = nk/N \tag{6}$$

gelten, damit die FFT angewendet werden kann. Da die Approximationspunkte $\{t_k\}_{k=0}^{N-1}$ von der Form $t_k = k$ sind, vereinfacht sich die Bedingung (6) zu

$$f_n = n/N, \tag{7}$$

für $n = 0, \ldots, N-1$. Bedingung (7) ist jedoch nicht erfüllt, da nach Voraussetzung $f_n = n$ für $n = 0, \ldots, N-1$, und N allgemein ist.

3. **Aufgabe**

(a) Mit Hilfe der Verschiebungseigenschaft und der Linearität der Fouriertransformation erhalten wir

$$\hat{x}(f) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-2\pi i n T f} \right) \hat{\varphi}(f).$$

Aus dieser Darstellung folgt, dass Bandbegrenztheit von $\varphi(t)$ zu Bandbegrenztheit von $x(t)$ führt. Konkret ist in diesem Fall die Bandbreite von $x(t)$ gleich der Bandbreite von $\varphi(t)$.

(b) Für $\varphi(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$ erhalten wir für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$x(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \underbrace{\varphi(kT - nT)}_{=\delta[k-n]} = a_k.$$

Somit kann

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varphi(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\varphi(t - nT)$$

eindeutig aus seinen Abtastwerten rekonstruiert werden. Die Darstellung

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}$$

entspricht gerade der Interpolationsformel zum Abtasttheorem für bandbegrenzte Signale.

(c) Für

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

erhalten wir wieder $\varphi(kT - nT) = \delta[k - n]$ für alle $k, n \in \mathbb{Z}$ und somit

$$x(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \underbrace{\varphi(kT - nT)}_{=\delta[k-n]} = a_k$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Folglich können wir die Koeffizienten a_n, $n \in \mathbb{Z}$, wieder aus den Abtastwerten $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, bestimmen und somit an Hand der Darstellung

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varphi(t - nT),$$

hieraus $x(t)$ ermitteln.

(d) Wir nehmen an, dass das Nyquist-Kriterium

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}\left(f - \frac{k}{T} \right) = 1 \tag{8}$$

erfüllt ist. Zunächst betrachten wir die Poissonsche Summenformel

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(t-kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(n/T) e^{2\pi i n t/T}. \tag{9}$$

Wir wenden nun (9) an mit $\hat{\varphi}$ in der Rolle von ψ, $1/T$ in der Rolle von T, t in der Rolle von f und f in der Rolle von t. Unter Verwendung der Beziehung $\hat{\hat{\varphi}}(t) = \varphi(-t)$ erhalten wir damit

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}\left(f - \frac{k}{T}\right) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(-nT) e^{2\pi i n T f}$$

oder anders ausgedrückt

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}\left(f - \frac{k}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(nT) e^{-2\pi i n T f}.$$

Somit ist das Nyquist-Kriterium äquivalent zu

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(nT) e^{-2\pi i n T f}. \tag{10}$$

Wir setzen $\theta := Tf$ in (10) und fassen die rechte Seite in (10) als zeitdiskrete Fouriertransformierte des Signals $\varphi[n] := \varphi(nT)$ auf. Durch Rücktransformation beider Seiten in (10) erhalten wir mit Hilfe der Transformationstabelle

$$\delta[n] = \varphi[n],$$

wie gewünscht. Die perfekte Rekonstruierbarkeit von $x(t)$ aus seinen Abtastwerten $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, folgt nun wie in den Teilaufgaben (b) und (c) aus der Tatsache, dass

$$x(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \underbrace{\varphi(kT - nT)}_{=\delta[k-n]} = a_k$$

und somit

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \varphi(t - nT).$$

(e) Für $\varphi(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$ aus Teilaufgabe (b) erhalten wir

$$\hat{\varphi}(f) = \begin{cases} T, & |f| \leq \frac{1}{2T} \\ 0, & |f| > \frac{1}{2T}, \end{cases}$$

und somit

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}\left(f - \frac{k}{T}\right) = 1,$$

da die lückenlose Aufsummierung verschobener Rechtecksignale das gewünschte konstante Signal liefert.

4. **Aufgabe**

(a) Die Eingangs-Ausgangsbeziehung im Frequenzbereich lautet

$$\hat{y}(\theta) = \hat{h}(\theta)\hat{x}(\theta),$$

wobei $\hat{x}(\theta), \hat{y}(\theta)$ die zeitdiskreten Fouriertransformierten des Eingangssignals $x[n]$ und des Ausgangssignals $y[n]$ bezeichnen. Damit erhalten wir

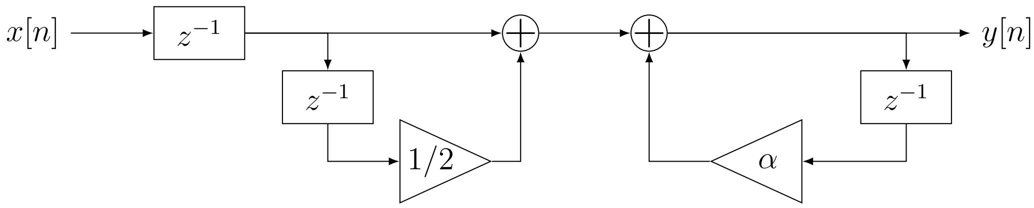
$$(1 - \alpha e^{-2\pi i\theta})\hat{y}(\theta) = \left(e^{-2\pi i\theta} + \frac{1}{2}e^{-4\pi i\theta}\right)\hat{x}(\theta),$$

woraus sich nach Rücktransformation unter Verwendung der Formelsammlung die Differenzengleichung

$$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-2]$$

ergibt.

(b) Ein mögliches Blockschaltbild, welches die Differenzengleichung aus Teilaufgabe a) realisiert, ist das Folgende:



(c) Wir formen den gegebenen Ausdruck für $\hat{h}(\theta)$ folgendermassen um:

$$\hat{h}(\theta) = \frac{e^{2\pi i\theta} + \frac{1}{2}}{e^{4\pi i\theta} - \alpha e^{2\pi i\theta}} = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta}}{e^{2\pi i\theta} - \alpha} = e^{-2\pi i\theta}\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta}}{1 - \alpha e^{-2\pi i\theta}}$$
$$= e^{-2\pi i\theta}\left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-2\pi i\theta}} + \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta}\frac{1}{1 - \alpha e^{-2\pi i\theta}}\right).$$

Unter Verwendung der Formelsammlung ergibt sich hieraus

$$h[n] = \alpha^{n-1}\sigma[n-1] + \frac{1}{2}\alpha^{n-2}\sigma[n-2].$$

(d) Zur Überprüfung der BIBO-Stabilität berechnen wir

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha^{n-1}\sigma[n-1] + \frac{1}{2}\alpha^{n-2}\sigma[n-2]| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} |\alpha|^{n-2} \\ &= \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^n \\ &= \frac{3}{2}\frac{1}{1-|\alpha|} < \infty,\end{aligned}$$

wobei wir die Dreiecksungleichung und die Annahme $|\alpha| < 1$ verwendet haben. Aus der absoluten Summierbarkeit der Impulsantwort folgt, dass das System H BIBO-stabil ist.

(e) Die Bedingung $(Hx)[n] = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ bedeutet im Frequenzbereich, dass

$$\hat{h}(\theta)\hat{x}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - k),$$

und somit

$$\begin{aligned}
\hat{x}(\theta) &= \frac{1}{\hat{h}(\theta)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\hat{h}(k)} \delta(\theta - k) \\
&= \frac{1}{3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - k).
\end{aligned}$$

Durch Rücktransformation folgt das gesuchte Eingangssignal

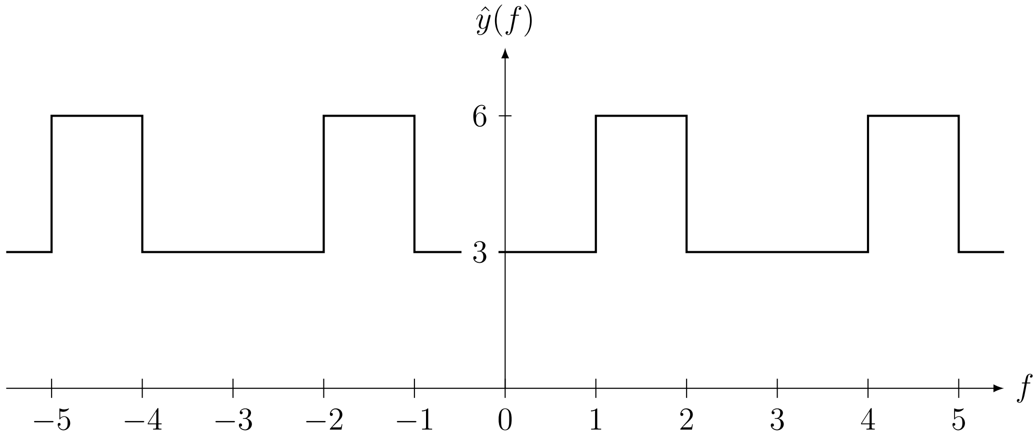
$$x[n] = \frac{1}{3}, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

5. **Aufgabe**

(a) Für die Fouriertransformierte $\hat{y}(f)$ von $y(t)$ folgt mit Hilfe der Formelsammlung

$$\hat{y}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right).$$

Mit $T = 1/3$ und dem gegebenen Spektrum von $x(t)$ erhalten wir damit die folgende Skizze:

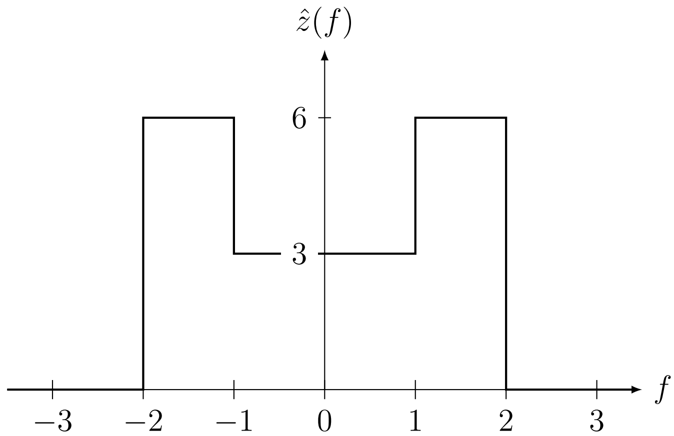


(b) Nach dem Abtasttheorem ist die Nyquistrate f_N gegeben durch die doppelte Bandbreite des Signals. Somit erhalten wir für das vorliegende Signal $f_N = 4$ und da $T = 1/3$ gilt, ergibt sich

$$\frac{1}{T} < f_N.$$

Es wird also unterabgetastet. Somit kann $x(t)$ nicht aus $y(t)$ rekonstruiert werden.

(c) Unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe (a) ergibt sich die folgende Gestalt für das Spektrum des gesuchten Signals $z(t)$:



Somit können wir $\hat{z}(f)$ zerlegen in die Differenz von zwei Rechtecksignalen

$$\hat{z}(f) = \hat{r}_1(f) - \hat{r}_2(f),$$

wobei

$$\hat{r}_1(f) = \begin{cases} 6, & |f| \leq 2 \\ 0, & |f| > 2 \end{cases}$$

$$\hat{r}_2(f) = \begin{cases} 3, & |f| \leq 1 \\ 0, & |f| > 1. \end{cases}$$

Die Rücktransformierten der Rechtecksignale ergeben sich mit Hilfe der Transformationstabelle zu

$$r_1(t) = \frac{6\sin(4\pi t)}{\pi t}$$

$$r_2(t) = \frac{3\sin(2\pi t)}{\pi t}.$$

Hieraus erhalten wir schliesslich das gesuchte Signal zu

$$z(t) = \frac{6\sin(4\pi t)}{\pi t} - \frac{3\sin(2\pi t)}{\pi t}.$$