Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
26. Januar 2016

Bitte beachten Sie:

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung erlaubt sind die Transformationstabellen, die Sie von uns erhalten. Die Benutzung von Rechnern/Smartphones/Tablets jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Aufgabenteile, die mit einem ★ gekennzeichnet sind, können unabhängig von vorhergehenden Aufgabenteilen gelöst werden.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen Sie darauf hin, dass Studierende bei unehrlichem Handeln während der Prüfung den Strafnormen der Disziplinarordnung RSETHZ 361.1 der ETHZ unterstehen.

Vor der Klausur:

1. Dieses Angabenheft hat 9 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen ausschliesslich auf die bereitgestellten leeren Blätter. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie weitere Blätter.

Nach der Klausur:

5. Nummerieren Sie die Lösungsblätter und beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen. Tragen Sie die Anzahl der Lösungsblätter (exklusive der Aufgabenblätter), die Sie abgeben möchten, auf dieser Seite unten ein und unterschreiben Sie. Alle Aufgabenblätter müssen abgegeben werden.

Nachname: .... Vorname: ....

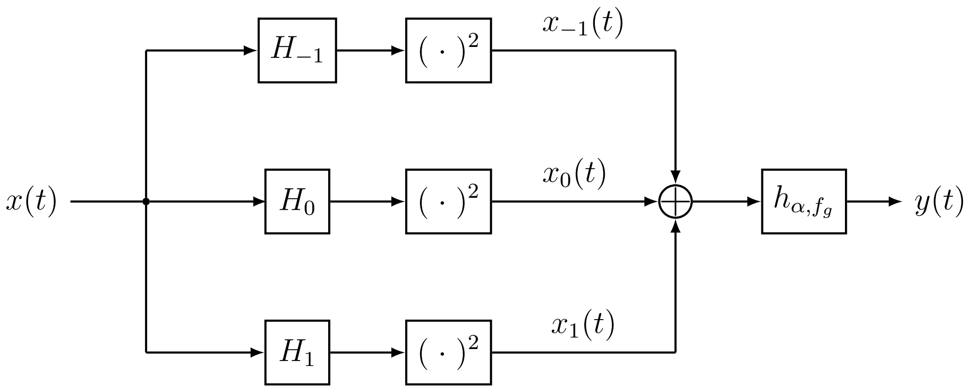
Legi-Nr.: ....

Anzahl abgegebener Lösungsblätter: ....

Unterschrift: ....

1. **Aufgabe** (20 Punkte) Tiefe neuronale Faltungsnetzwerke (engl. *deep convolutional neural networks*) werden von vielen Unternehmen (u. A., Google, Facebook, Amazon) zum Finden von Strukturen in grossen Datenmengen verwendet. Diese Netzwerke bestehen aus mehreren hintereinandergeschalteten Modulen, wobei jedes einzelne Modul die folgenden drei Operationen durchführt: (i) Faltungen mit Impulsantworten von verschiedenen LTI-Systemen, gefolgt von (ii) nichtlinearen Operationen, sowie (iii) einer Zusammenfassung von Signalen (z.B., mit Hilfe von Additionen und Tiefpassfilterung). Das Ziel dieser Aufgabe ist es, ein einzelnes Modul solch eines Netzwerkes zu untersuchen.

   Betrachten Sie dazu das folgende System:



   Hierbei ist H_k, für $k \in \{-1, 0, 1\}$, ein zeitkontinuierliches LTI-System mit Impulsantwort

$$h_k(t) := \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} e^{2\pi i k t}. \tag{1}$$

   Ferner antwortet der Quadrierer $(\,\cdot\,)^2$ auf ein Eingangssignal $x(t)$ mit dem Ausgangssignal $x^2(t)$. Das Tiefpassfilter $h_{\alpha,f_g}(t)$ habe den Frequenzgang

$$\widehat{h_{\alpha,f_g}}(f) = \begin{cases} \alpha, & |f| \leq f_g, \\ 0, & |f| > f_g, \end{cases}$$

   mit $\alpha, f_g > 0$.

   ★ (a) (5 Punkte) Bestimmen Sie die zeitkontinuierliche Fouriertransformation $\widehat{h_k}(f)$, für $k \in \{-1, 0, 1\}$, der Impulsantwort $h_k(t)$ in (1). Skizzieren Sie zudem $\widehat{h_k}(f)$, für $k \in \{-1, 0, 1\}$. *Achten Sie auf die Beschriftung der Achsen!*

   ★ (b) (3 Punkte) Überprüfen Sie für welche $k \in \{-1, 0, 1\}$ die Impulsantwort $h_k(t)$ absolut integrierbar ist, d.h., für welche $k \in \{-1, 0, 1\}$

$$\int_{\infty}^{\infty} |h_k(t)| \mathrm{d}t < \infty$$

   gilt. Begründen Sie Ihre Antwort!

Nehmen Sie in den folgenden beiden Teilaufgaben an, dass das Eingangssignal durch

$$x(t) := \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}$$

gegeben ist.

(c) (7 Punkte) Bestimmen Sie die Zwischensignale $x_{-1}(t)$, $x_0(t)$ und $x_1(t)$.

(d) (5 Punkte) Überprüfen Sie für welche $\alpha, f_g > 0$ die Gleichheit

$$y(t) = x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

gilt. Begründen Sie Ihre Antwort!

2. **Aufgabe** (19 Punkte)

Es seien $T > 0$ und $K \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Betrachten Sie das Signal

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

wobei $a_k > 0$, $\varphi_k \in [0, 2\pi)$, und $f_k \in \left[0, \frac{1}{2T}\right)$, für alle $k \in \{1, 2, \ldots, K\}$.

★ (a) (4 Punkte) Überprüfen Sie, ob das Signal $x(t)$ aus seinen Abtastwerten $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, exakt rekonstruiert werden kann. Begründen Sie Ihre Antwort.

Im restlichen Teil der Aufgabe nehmen wir an, dass die Abtastwerte $x(nT)$ *lediglich* für $n \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ bekannt sind, wobei $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ fest ist. Wir möchten das Signal $x(t)$ in (2) aus den Abtastwerten $x(nT)$, $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, exakt rekonstruieren. K sei als bekannt vorausgesetzt.

★ (b) (5 Punkte) Nehmen Sie in dieser Teilaufgabe an, dass $N = 2K + 1$ und $f_k = \frac{k}{NT}$, für alle $k \in \{1, 2, \ldots, K\}$. Geben Sie eine Methode zur Bestimmung von $x(t)$ aus $x(nT)$, $n \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$, an.

★ (c) Nehmen Sie in dieser Teilaufgabe an, dass $N = 4K$ und f_k, für alle $k \in \{1, 2, \ldots, K\}$, wieder beliebige Werte im Intervall $\left[0, \frac{1}{2T}\right)$ annehmen kann.

★ i. (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Abtastwerte $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, in der Form

$$x_n = x(nT) = \sum_{k=1}^{2K} b_k e^{i\theta_k n}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

geschrieben werden können und bestimmen Sie die zugehörigen Parameter $b_k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $\theta_k \in \mathbb{R}$, für alle $k \in \{1, 2, \ldots, 2K\}$.

★ ii. (2 Punkte) Es sei

$$P(z) = \sum_{m=0}^{2K} p_m z^m \tag{4}$$

ein Polynom in $z \in \mathbb{C}$ mit $p_m \in \mathbb{C}$, für alle $m \in \{0, 1, \ldots, 2K\}$. Die Nullstellen des Polynoms (4) seien durch $e^{-i\theta_k}$, $k \in \{1, 2, \ldots, 2K\}$, gegeben, d.h., $P(e^{-i\theta_k}) = 0$, für alle $k \in \{1, 2, \ldots, 2K\}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{m=0}^{2K} p_m x_{n-m} = 0,$$

wobei x_n die in (3) gegebenen Abtastwerte sind und die Parameter θ_k hier gleich den Parametern θ_k in (3) sind.

★ iii. (3 Punkte) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Gleichung:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{2K-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{2K-1} & x_{2K} & \dots & x_{4K-2} \end{pmatrix} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^T,$$

wobei x_n die in (3) gegebenen Abtastwerte sind,

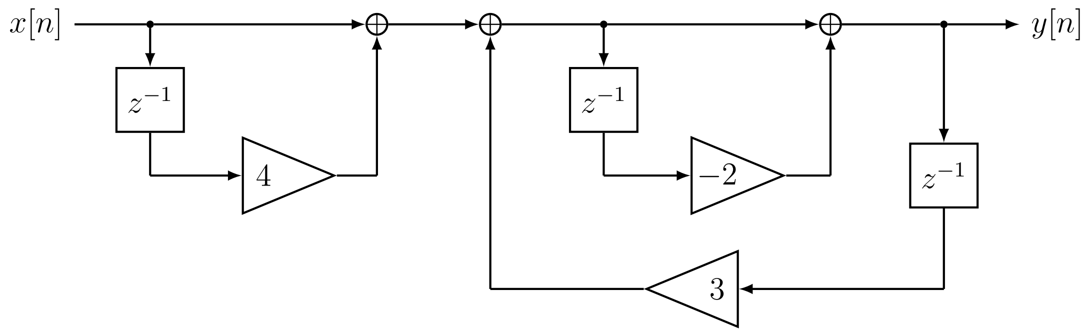
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{2K} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist und $\mathbf{V}$ eine sogenannte Vandermonde-Matrix, die gegeben ist durch

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{i\theta_1} & e^{i\theta_2} & \dots & e^{i\theta_{2K}} \\ e^{2i\theta_1} & e^{2i\theta_2} & \dots & e^{2i\theta_{2K}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{(2K-1)i\theta_1} & e^{(2K-1)i\theta_2} & \dots & e^{(2K-1)i\theta_{2K}} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

3. **Aufgabe** (21 Punkte)

★ (a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die zum folgenden zeitdiskreten LTI-System gehörige Differenzengleichung, die das Ausgangssignal $y[n]$ als Funktion des Eingangssignals $x[n]$ beschreibt.



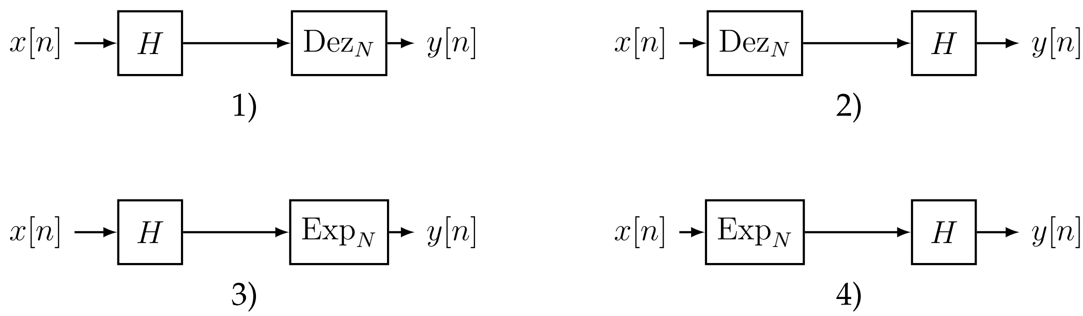
★ (b) Für ein zeitdiskretes Signal $x[n]$ und eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$, sind der Expander und der Dezimator bezüglich des Faktors N definiert durch

$$(\mathrm{Exp}_N\, x)[n] = \begin{cases} x[n/N], & \text{falls } n \text{ durch } N \text{ teilbar ist,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$
$$(\mathrm{Dez}_N\, x)[n] = x[nN].$$

Es sei H ein zeitdiskretes BIBO-stabiles System.

i. (1 Punkt) Geben Sie die Definition von BIBO-Stabilität für zeitdiskrete Systeme an.

ii. (2 Punkte) Welche der folgenden Systeme sind BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antworten formal über die Definition von BIBO-Stabilität.



1) 2) 3) 4)

★ (c) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für die zeitdiskrete Fouriertransformierte des expandierten Signals $y[n] = (\mathrm{Exp}_N\, x)[n]$ gilt

$$\hat{y}(\theta) = \hat{x}(N\theta).$$

(d) Wir betrachten nun das System 4) in (b) mit $N = 2$. Das LTI-System H habe die Impulsantwort

$$h[n] = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\beta}{2} \right)^n \sigma[n],$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ und $\beta \in \mathbb{R}$.

★ i. (4 Punkte) Geben Sie einen möglichst grossen Wertebereich für β an, für den H sicher BIBO-stabil ist. Bestimmen Sie $\hat{h}(\theta)$.

ii. (7 Punkte) Für das Eingangssignal $x[n] = 2e^{\pi i n}$ beobachten wir nun das zugehörige Ausgangssignal $y[n] = 2(1 - i/2)e^{\pi i n/2} + 2(1 + i/2)e^{3\pi i n/2}$. Bestimmen Sie die Fouriertransformierte des Ausgangssignals des Expanders, $\hat{y}(\theta)$, und die zugehörigen Werte für α und β.

4. **Aufgabe** (20 Punkte) Das Bestimmen der Fouriertransformation $\hat{x}(f)$ eines zeitkontinuierlichen Signals $x(t)$ erfordert die Kenntnis des gesamten Verlaufs des zugrundeliegenden Signals, d.h., Kenntnis der Werte von $x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da dies in der Praxis oft nicht realisierbar ist, werden nur Ausschnitte von $x(t)$ betrachtet. Die daraus resultierende Kurzzeit-Fouriertransformation (engl.: *short-time Fourier transform* oder *STFT*) des Signals $x(t)$ mit der reellwertigen Fensterfunktion $h(t)$ ist definiert als

$$\hat{x}_h(t, f) := \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(\tau - t)e^{-2\pi i f \tau} \mathrm{d}\tau.$$

★ (a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für gegebene Fensterfunktion $h(t)$ die Abbildung $x(t) \mapsto \hat{x}_h(t, f)$ linear ist.

★ (b) (7 Punkte) Der Modulationsoperator M_{f_0} und der Translationsoperator T_{t_0} sind definiert durch

$$(M_{f_0}x)(t) := e^{2\pi i f_0 t} x(t) \qquad \text{und} \qquad (T_{t_0}x)(t) := x(t - t_0).$$

Zeigen Sie, dass folgende Identität gilt:

$$T_{t_0} M_{f_0} = e^{-2\pi i f_0 t_0} M_{f_0} T_{t_0}.$$

Zeigen Sie ferner, dass folgende Eigenschaften der Kurzzeit-Fouriertransformation gelten:

$$\begin{aligned}
\hat{z}_h(t, f) &= \hat{x}_h(t, f - f_0), && \text{für } z = M_{f_0}x, \\
\hat{z}_h(t, f) &= e^{-2\pi i f t_0} \hat{x}_h(t - t_0, f), && \text{für } z = T_{t_0}x, \\
\hat{z}_h(t, f) &= e^{-2\pi i f t_0} \hat{x}_h(t - t_0, f - f_0), && \text{für } z = T_{t_0} M_{f_0} x.
\end{aligned}$$

★ (c) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $\hat{x}_h(t, f)$ als Funktion der Fouriertransformierten $\hat{x}(f)$ und $\hat{h}(f)$ in folgender Form dargestellt werden kann:

$$\hat{x}_h(t, f) = e^{-2\pi i f t} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\rho)\hat{h}(f - \rho)e^{2\pi i \rho t} \mathrm{d}\rho.$$

(d) (6 Punkte) Gegeben seien nun das zeitkontinuierliche Signal

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

und die Fensterfunktion

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{T_0}, & |t| \leqslant \frac{T_0}{2}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Geben Sie die zugehörige Kurzzeit-Fouriertransformation $\hat{x}_h(t, f)$ an. Berechnen Sie den Wert von $\hat{x}_h(t, f)$ im Limes $T_0 \to 0$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

5. **Aufgabe** (20 Punkte) Die Autokorrelation eines Signals ist ein Mass dafür, wie sehr ein Signal seinen zeitverschobenen Versionen ähnelt. Für ein zeitdiskretes Signal $x[n]$ ist die Autokorrelation definiert durch

$$r_x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*[m]x[m+n]. \tag{6}$$

★ (a) (3 Punkte) Stellen Sie $r_x[n]$ als lineare Faltung dar, das heisst, finden Sie zeitdiskrete Signale $x_1[n]$ und $x_2[n]$, sodass $r_x[n] = (x_1 * x_2)[n]$, für alle n, gilt.

In den folgenden Teilaufgaben betrachten wir ein zeitdiskretes Signal $x[n]$ der Länge 1024, das heisst, $x[n] = 0$ für alle $n < 0$ und alle $n > 1023$.

★ (b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Länge des Signals $r_x[n]$, das heisst, die kleinste Zahl L, für die ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $r_x[n] = 0$ für alle $n < n_0$ und alle $n > n_0 + (L-1)$.

Im Folgenden soll ein effizientes Verfahren zur Bestimmung der Autokorrelation des oben angenommenen Signals $x[n]$ der Länge 1024 untersucht werden. Es sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 1024$ aber sonst beliebig und $\hat{\mathbf{x}}_N = [\hat{x}_N[0], \dots, \hat{x}_N[N-1]]$ sei die N-Punkt DFT (diskrete Fouriertransformation) des Signals $\mathbf{x}_N = [x[0], \dots, x[N-1]]$. Darüber hinaus definieren wir $\mathbf{g}_N = [g_N[0], \dots, g_N[N-1]]$ als die N-Punkt IDFT (inverse diskrete Fouriertransformation) des Signals $[|\hat{x}_N[0]|^2, \dots, |\hat{x}_N[N-1]|^2]$. Der Ansatz des Verfahrens besteht darin, die Autokorrelation $r_x[n]$ in (6) aus dem Signal $\mathbf{g}_N$ zu gewinnen.

★ (c) (4 Punkte) Geben Sie einen expliziten Ausdruck für $g[n]$, $n = 0, \dots, N-1$, in Abhängigkeit von $x[n]$ an.

(d) (4 Punkte) Werten Sie die Formel aus Teilaufgabe (c) für $n = 0, 1, 2$ aus. Wie müssen Sie N wählen, damit $g_N[n] = r_x[n]$ für $n = 0, 1, 2$?

(e) (6 Punkte) Bestimmen Sie nun das kleinstmögliche $N \geq 1024$, welches erlaubt $r_x[n]$ für alle n aus $\mathbf{g}_N$ zu erhalten und erklären Sie wie $r_x[n]$ aus $\mathbf{g}_N$ gewonnen werden kann.