

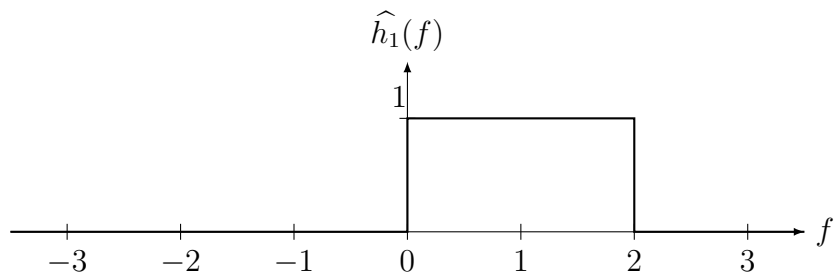
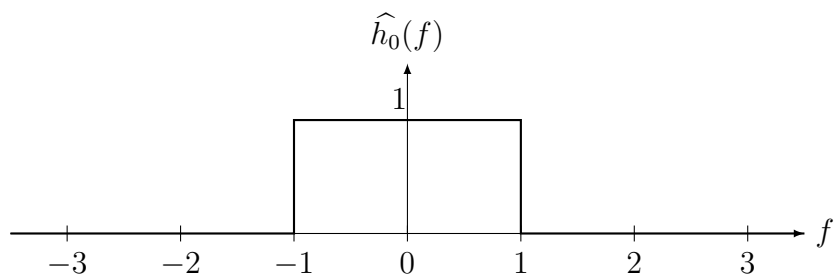
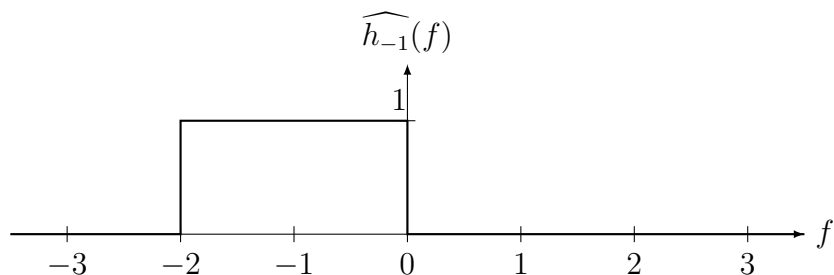
Lösung zur Klausur zu Signal- und Systemtheorie I 26. Januar 2016

1. Aufgabe

(a) Aus der Transformationstabelle erhalten wir

$$\widehat{h}_k(f) = \begin{cases} 1, & |f - k| \leq 1, \\ 0, & |f - k| > 1, \end{cases}$$

für $k \in \{-1, 0, 1\}$. Damit ergeben sich folgende Schaubilder:



(b) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_k(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \right| dt. \quad (1)$$

Da der Ausdruck auf der rechten Seite in (1) unabhängig von k ist, folgt, dass alle Impulsantworten die gleiche Eigenschaft bezüglich der absoluten

Integrierbarkeit haben, d.h., entweder sind alle h_k , $k \in \{-1, 0, 1\}$, absolut integrierbar oder nicht. Wir betrachten im Folgenden eine konkrete Impulsantwort, nämlich $h_0(t)$ mit Frequenzgang

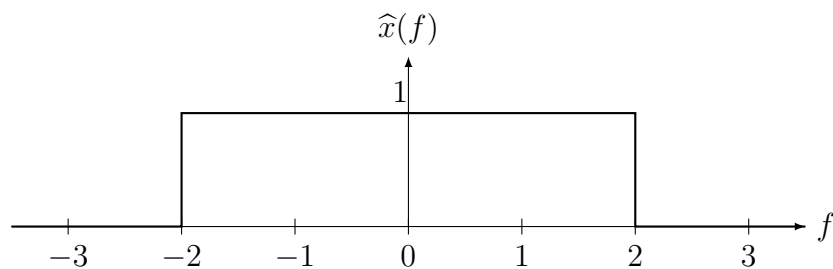
$$\hat{h}_0(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq 1, \\ 0, & |f| > 1. \end{cases}$$

Der Frequenzgang hat Unstetigkeitsstellen bei $t = -1$ und $t = 1$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Unstetigkeitsstellen im Frequenzgang implizieren, dass die zugehörige Impulsantwort nicht absolut integrierbar ist (siehe Riemann-Lebesgue Lemma im Skriptum). Somit ist $h_0(t)$, und damit auch $h_{-1}(t)$ und $h_1(t)$ *nicht* absolut integrierbar.

- (c) Wir transformieren das Eingangssignal $x(t)$ in den Frequenzbereich und erhalten mit Hilfe der Transformationstabelle

$$\hat{x}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq 2, \\ 0, & |f| > 2. \end{cases}$$

Die Funktion $\hat{x}(f)$ lässt sich wie folgt darstellen:



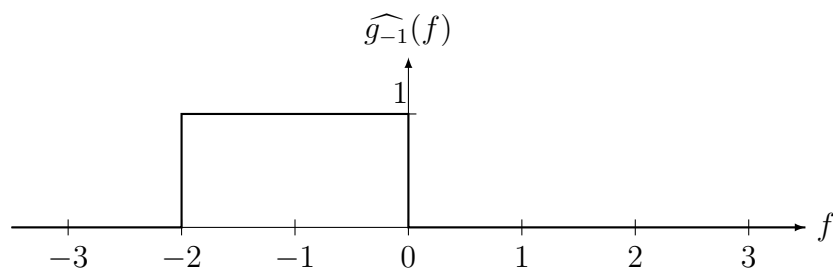
Um die Systemantworten $(H_k x)(t)$ nach Durchlaufen der LTI-Systeme H_k zu bestimmen, definieren wir

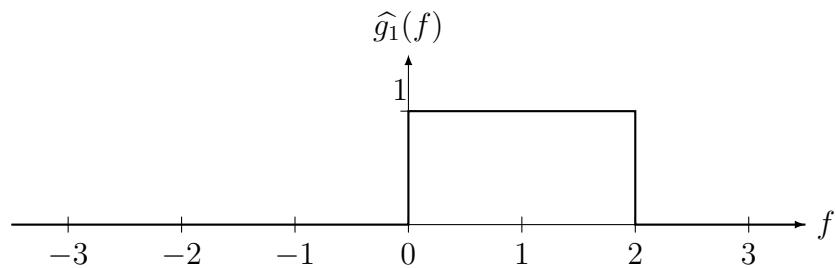
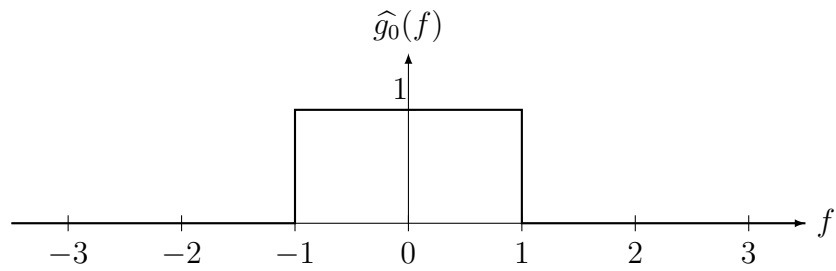
$$g_k(t) := (H_k x)(t) = (x * h_k)(t), \quad \forall k \in \{-1, 0, 1\},$$

und erhalten weiter

$$\hat{g}_k(f) = \hat{x}(f) \cdot \hat{h}_k(f), \quad \forall k \in \{-1, 0, 1\}.$$

Mit Hilfe des Schaubildes für $\hat{x}(f)$ und der Schaubilder aus Teilaufgabe a) erhalten wir:





Aus den Schaubildern für die \widehat{g}_k und die \widehat{h}_k ist ersichtlich, dass $\widehat{g}_k(f) = \widehat{h}_k(f)$, für $k \in \{-1, 0, 1\}$, und damit $g_k(t) = h_k(t)$, für $k \in \{-1, 0, 1\}$. Schliesslich gilt für die Zwischensignale

$$x_k(t) = g_k^2(t) = h_k^2(t) = \frac{\sin^2(2\pi t)}{\pi^2 t^2} e^{4\pi i k t}, \quad \forall k \in \{-1, 0, 1\}. \quad (2)$$

(d) Wir definieren das Hilfssignal

$$z(t) := x_{-1}(t) + x_0(t) + x_1(t).$$

Die Linearität der Fouriertransformation liefert

$$\widehat{z}(f) = \widehat{x_{-1}}(f) + \widehat{x_0}(f) + \widehat{x_1}(f).$$

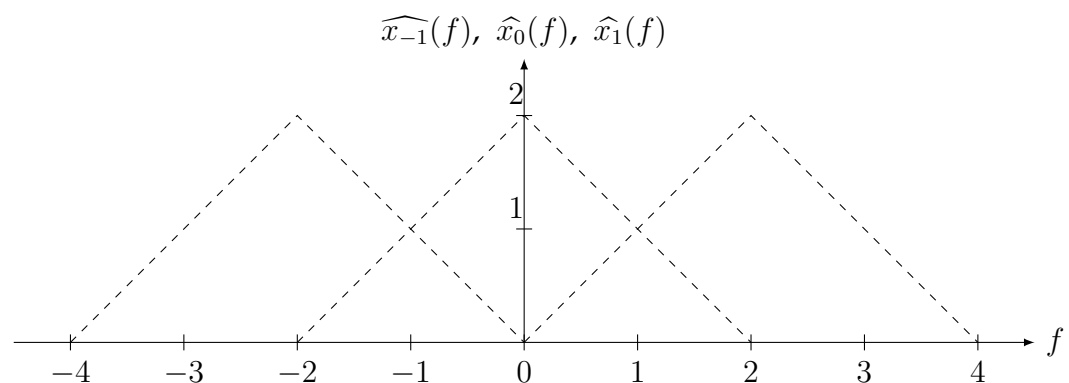
Mit Hilfe der Identität (2), der Transformationstabelle, und unter Berücksichtigung der Korrespondenz

$$x^2(t) = x(t)x(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad (\widehat{x} * \widehat{x})(f)$$

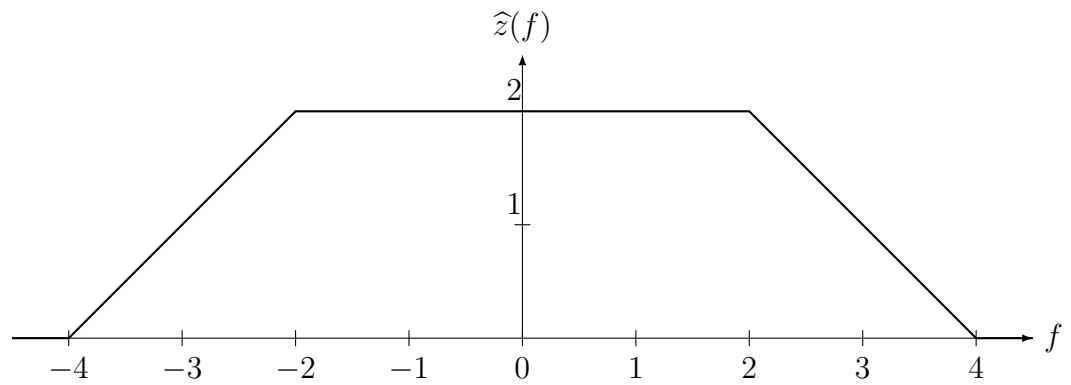
erhalten wir

$$\widehat{x}_k(f) = \begin{cases} 2 - |f - 2k|, & |f - 2k| \leq 2, \\ 0, & |f - 2k| > 2, \end{cases} \quad \forall k \in \{-1, 0, 1\}.$$

Als Summe von drei „Hütchensignalen“ der Form



hat das Hilfssignal $z(t)$ folgende Gestalt:



Wir können somit die Gleichung

$$y(t) = (z * h_{\alpha, f_g})(t) = x(t)$$

mit $\alpha = \frac{1}{2}$ und $f_g = 2$ erfüllen.

2. Aufgabe

(a) Da die Fouriertransformierte des Signals $x(t)$ gegeben ist durch

$$\hat{x}(f) = \sum_{k=1}^K \frac{a_k}{2} e^{\frac{i\varphi_k f}{f_k}} (\delta(f - f_k) + \delta(f + f_k)),$$

und $f_k \in [0, \frac{1}{2T})$, für alle $k \in \{1, 2, \dots, K\}$, ist das Spektrum von $x(t)$ auf das Intervall $(-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T})$ begrenzt. Somit ist die Bedingung

$$f_s = \frac{1}{T} \geq 2f_g = \frac{1}{T}$$

für die Gültigkeit des Abtasttheorems erfüllt, und das Signal $x(t)$ kann daher aus seinen Abtastwerten $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, exakt rekonstruiert werden.

(b) Die Rekonstruktion des Signals $x(t)$ beschränkt sich dank der Struktur des Signals gemäss (2) auf das Bestimmen der Parameter $\{(a_k, \varphi_k)\}_{k=1}^K$ aus den Abtastwerten $x(nT)$. Der n -te Abtastwert von $x(t)$ kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} x_n = x(nT) &= \sum_{k=1}^K a_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N} + \varphi_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{a_k}{2} \left(e^{i\left(\frac{2\pi kn}{N} + \varphi_k\right)} + e^{-i\left(\frac{2\pi kn}{N} + \varphi_k\right)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} \frac{a_{k+1}}{2} e^{i\varphi_{k+1}} e^{\frac{2\pi i(k+1)n}{N}} + \sum_{k=K}^{2K-1} \frac{a_{2K-k}}{2} e^{-i\varphi_{2K-k}} e^{\frac{-2\pi i(2K-k)n}{N}} \\ &= e^{\frac{2\pi in}{N}} \left(\sum_{k=0}^{K-1} \frac{a_{k+1}}{2} e^{i\varphi_{k+1}} e^{\frac{2\pi i kn}{N}} + \sum_{k=K}^{2K-1} \frac{a_{2K-k}}{2} e^{-i\varphi_{2K-k}} e^{\frac{2\pi i kn}{N}} \right) \quad (3) \\ &= e^{\frac{2\pi in}{N}} \sum_{k=0}^{2K-1} \alpha_k e^{\frac{2\pi i kn}{N}}, \end{aligned}$$

wobei in (3) $N = 2K + 1$ verwendet wurde und

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{a_{k+1}}{2} e^{i\varphi_{k+1}}, & k \in \{0, 1, \dots, K-1\}, \\ \frac{a_{2K-k}}{2} e^{-i\varphi_{2K-k}}, & k \in \{K, K+1, \dots, 2K-1\}. \end{cases}$$

Nun erkennen wir, dass die Parameter α_k aus

$$x_n e^{-\frac{2\pi in}{N}} = \sum_{k=0}^{2K-1} \alpha_k e^{\frac{2\pi i kn}{N}}$$

durch Invertieren des Gleichungssystems

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{N}} & \dots & e^{\frac{2\pi i(N-2)}{N}} & e^{\frac{2\pi i(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{\frac{2\pi i(N-2)}{N}} & \dots & e^{\frac{2\pi i(N-2)^2}{N}} & e^{\frac{2\pi i(N-1)(N-2)}{N}} \\ 1 & e^{\frac{2\pi i(N-1)}{N}} & \dots & e^{\frac{2\pi i(N-2)(N-1)}{N}} & e^{\frac{2\pi i(N-1)^2}{N}} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{F}_N^H} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{N-2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmt werden können, wobei \mathbf{F}_N die $N \times N$ DFT-Matrix ist und damit (siehe Vorlesung) invertierbar.

Weil $a_k > 0$ und $\varphi_k \in [0, 2\pi)$, folgt dass $a_k = 2|\alpha_{k-1}|$ und φ_k durch das Argument (modulo 2π) von α_{k-1} , für alle $k \in \{1, 2, \dots, K\}$, gegeben ist.

(c) i. Der n -te Abtastwert kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} x(nT) &= \sum_{k=1}^K \frac{a_k}{2} (e^{i(2\pi f_k nT + \varphi_k)} + e^{-i(2\pi f_k nT + \varphi_k)}) \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{a_k}{2} e^{i\varphi_k} e^{2\pi i f_k nT} + \sum_{k=K+1}^{2K} \frac{a_{k-K}}{2} e^{-i\varphi_{k-K}} e^{-2\pi i f_{k-K} nT} \\ &= \sum_{k=1}^{2K} b_k e^{i\theta_k n}, \end{aligned}$$

wobei

$$b_k = \begin{cases} \frac{a_k}{2} e^{i\varphi_k}, & k \in \{1, 2, \dots, K\}, \\ \frac{a_{k-K}}{2} e^{-i\varphi_{k-K}}, & k \in \{K+1, K+2, \dots, 2K\} \end{cases}$$

und

$$\theta_k = \begin{cases} 2\pi f_k T, & k \in \{1, 2, \dots, K\}, \\ -2\pi f_{k-K} T, & k \in \{K+1, K+2, \dots, 2K\}. \end{cases}$$

Es gilt, dass $b_k \neq 0$ für alle $k \in \{1, 2, \dots, 2K\}$, weil angenommen wurde, dass $a_k > 0$ für alle $k \in \{1, 2, \dots, K\}$.

ii. Wir haben

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{2K} p_m x_{n-m} &= \sum_{m=0}^{2K} p_m \sum_{k=1}^{2K} b_k e^{i\theta_k(n-m)} = \sum_{k=1}^{2K} b_k e^{i\theta_k n} \sum_{m=0}^{2K} p_m e^{-i\theta_k m} \\ &= \sum_{k=1}^{2K} b_k e^{i\theta_k n} P(e^{-i\theta_k}) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

wobei die letzte Gleichung in (4) aus $P(e^{-i\theta_k}) = 0$, für $k \in \{1, 2, \dots, 2K\}$, folgt.

- iii. Es seien $n \in \{1, 2, \dots, 2K\}$ und $k \in \{1, 2, \dots, 2K\}$. Die Komponente in der n -ten Zeile und k -ten Spalte der Matrix \mathbf{VD} ist $(\mathbf{VD})_{n,k} = b_k e^{i\theta_k(n-1)}$. Es seien ferner $k \in \{1, 2, \dots, 2K\}$ und $m \in \{1, 2, \dots, 2K\}$. Die Komponente in der k -ten Zeile und m -ten Spalte der Matrix \mathbf{V}^T ist $(\mathbf{V}^T)_{k,m} = e^{i\theta_k(m-1)}$. Wiederum seien $n \in \{1, 2, \dots, 2K\}$ und $m \in \{1, 2, \dots, 2K\}$. Die Komponente in der n -ten Zeile und m -ten Spalte der Matrix \mathbf{VDV}^T ist damit gegeben durch

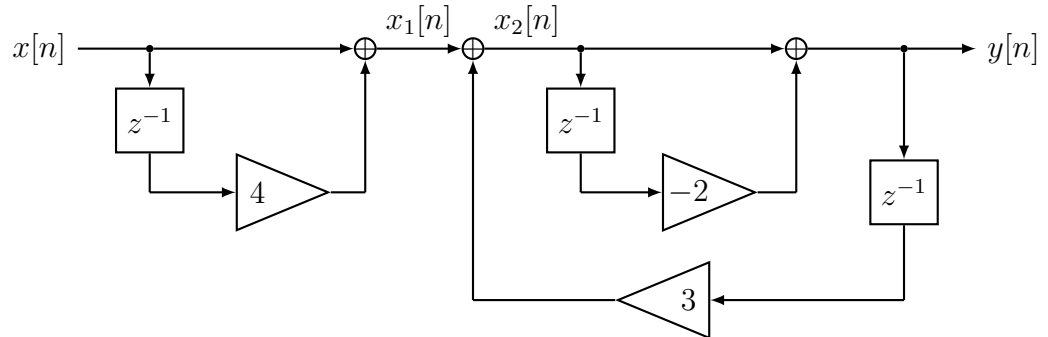
$$\begin{aligned} (\mathbf{VDV}^T)_{n,m} &= \sum_{k=1}^{2K} (\mathbf{VD})_{n,k} (\mathbf{V}^T)_{k,m} = \sum_{k=1}^{2K} b_k e^{i\theta_k(n-1)} e^{i\theta_k(m-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{2K} b_k e^{i\theta_k(n+m-2)} = x_{n+m-2}. \end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis, da x_{n+m-2} der Eintrag in der n -ten Zeile und m -ten Spalte der folgenden Matrix ist:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{2K-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{2K-1} & x_{2K} & \dots & x_{4K-2} \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe

(a) Wir definieren die Zwischensignale $x_1[n]$ und $x_2[n]$ wie folgt.



Aus dem Schaltbild ermitteln wir

$$x_1[n] = x[n] + 4x[n - 1] \quad (5)$$

$$x_2[n] = x_1[n] + 3y[n - 1] \quad (6)$$

$$y[n] = x_2[n] - 2x_2[n - 1]. \quad (7)$$

Durch Einsetzen von (5) in (6) erhalten wir

$$x_2[n] = x[n] + 4x[n - 1] + 3y[n - 1].$$

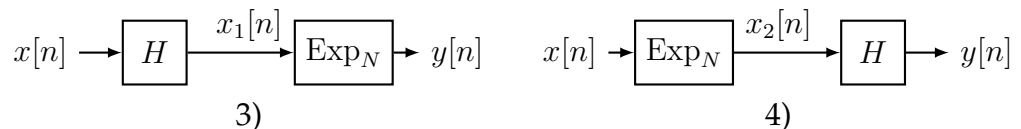
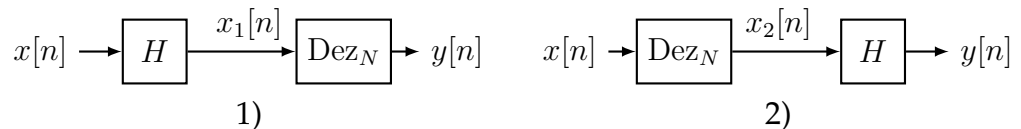
Einsetzen dieser Gleichung in (7) liefert

$$y[n] = x[n] + 4x[n - 1] + 3y[n - 1] - 2x[n - 1] - 8x[n - 2] - 6y[n - 2],$$

und nach Umformen erhalten wir die Differenzengleichung

$$y[n] - 3y[n - 1] + 6y[n - 2] = x[n] + 2x[n - 1] - 8x[n - 2].$$

- (b) i. Aus dem Skriptum: Ein zeitdiskretes System $H: X \rightarrow Y$ ist BIBO-stabil, wenn für jedes $x \in X$ mit $|x[n]| \leq B_x < \infty$, für alle $n \in \mathbb{Z}$, ein B_y existiert, sodass $|(Hx)[n]| \leq B_y < \infty$, für alle $n \in \mathbb{Z}$.
- ii. Wir definieren die Zwischensignale $x_1[n]$ und $x_2[n]$ wie folgt.



Die Systeme in 1) und 3) sind BIBO-stabil, da H BIBO-stabil ist und $x_1[n] = |(Hx)[n]| \leq B_{x_1} < \infty$, für alle $n \in \mathbb{Z}$, impliziert, dass ein B_y existiert, sodass $|y[n]| \leq B_y < \infty$, für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dies kommt daher, dass der Dezimator nur Elemente aus $x_1[n]$ entfernt und der Expander nur Nullen zu $x_1[n]$ hinzufügt, beides Operationen, die das Maximum von

$|x_1[n]|$ über alle n nicht grösser machen. Aus dem selben Grund impliziert $|x[n]| \leq B_x < \infty$, für alle $n \in \mathbb{Z}$, dass $|x_2[n]| \leq B_x < \infty$, für alle $n \in \mathbb{Z}$, und folglich sind auch die Gesamtsysteme in 2) und 4) BIBO-stabil, als Konsequenz der BIBO-Stabilität von H .

(c) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\hat{y}(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-2\pi in\theta} \\ &= \sum_{\substack{n=kN \\ k \in \mathbb{Z}}} x[n/N]e^{-2\pi in\theta} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-2\pi ikN\theta} \\ &= \hat{x}(N\theta).\end{aligned}$$

(d) i. Eine hinreichende Bedingung für BIBO-Stabilität von H ist

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \frac{|\alpha|}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|\beta|}{2}\right)^n < \infty.$$

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (|\beta|/2)^n$ konvergiert für $|\beta|/2 < 1$. Folglich ist H sicher BIBO-stabil, wenn $|\beta| < 2$. Mit Hilfe der Transformationstabelle erhalten wir

$$\hat{h}(\theta) = \frac{\alpha/2}{1 - (\beta/2)e^{-2\pi i\theta}} = \frac{\alpha}{2 - \beta e^{-2\pi i\theta}}$$

für $|\beta|/2 < 1$. Die Fouriertransformierte von $h[n]$ existiert daher ebenfalls für $|\beta| < 2$.

ii. Gemäss Transformationstabelle haben wir

$$\begin{aligned}\hat{x}(\theta) &= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 1/2 - k) \quad \text{und} \\ \hat{y}(\theta) &= 2(1 - i/2) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 1/4 - k) + 2(1 + i/2) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 3/4 - k).\end{aligned}\tag{8}$$

Im Folgenden bezeichnet $x_2[n]$ das Ausgangssignal des Expanders (siehe Schaltbild 4) in der Lösung von Aufgabe (b) ii.). Durch Anwendung der Frequenzbereichs-Eingangs-Ausgangsbeziehung für den Expander

(siehe Aufgabe (c)) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_2(\theta) &= \hat{x}(2\theta) \\
 &= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(2\theta - 1/2 - k) \\
 &= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \delta(\theta - 1/4 - k/2) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 1/4 - k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 3/4 - k),
 \end{aligned}$$

wobei der Schritt von der zweiten zur dritten Gleichung aus der Skalierungseigenschaft

$$\delta(au + b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(u + \frac{b}{a}\right)$$

mit $a = 2$ und $b = -1/2 - k$ folgt. Die Beziehung $\hat{y}(\theta) = \hat{h}(\theta)\hat{x}_2(\theta)$ liefert weiter

$$\begin{aligned}
 \hat{y}(\theta) &= \frac{\alpha}{2 - \beta e^{-2\pi i \theta}} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 1/4 - k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 3/4 - k) \right) \\
 &= \frac{\alpha}{2 - \beta e^{-\pi i/2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 1/4 - k) + \frac{\alpha}{2 - \beta e^{-3\pi i/2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 3/4 - k) \\
 &= \frac{\alpha}{2 + i\beta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 1/4 - k) + \frac{\alpha}{2 - i\beta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 3/4 - k). \quad (9)
 \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich zwischen (8) and (9) ergibt nun

$$\frac{\alpha}{2 + i\beta} = 2(1 - i/2) \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{2 - i\beta} = 2(1 + i/2).$$

Auflösen dieser Gleichungen nach α und Gleichsetzen ergibt

$$2(1 - i/2)(2 + i\beta) = 2(1 + i/2)(2 - i\beta),$$

woraus $\beta = 1$ folgt. Einsetzen von β ergibt nun

$$\alpha = 2(1 - i/2)(2 + i) = 5.$$

4. Aufgabe

- (a) Für zeitkontinuierliche Signale $x(t), y(t)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ erhalten wir die STFT des Signals $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ als

$$\begin{aligned}\hat{z}_h(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x(\tau) + \beta y(\tau)) h(\tau - t) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(\tau - t) e^{-2\pi i f \tau} d\tau + \beta \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) h(\tau - t) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \alpha \hat{x}_h(t, f) + \beta \hat{y}_h(t, f).\end{aligned}$$

- (b) Die Identität folgt aus

$$\begin{aligned}(T_{t_0} M_{f_0} x)(t) &= (M_{f_0} x)(t - t_0) \\ &= e^{2\pi i f_0 (t - t_0)} x(t - t_0) \\ &= e^{-2\pi i f_0 t_0} (M_{f_0} T_{t_0} x)(t).\end{aligned}\tag{10}$$

Die ersten beiden Eigenschaften folgen direkt gemäss

$$\begin{aligned}\hat{z}_h(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} (M_{f_0} x)(\tau) h(\tau - t) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f_0 \tau} x(\tau) h(\tau - t) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(\tau - t) e^{-2\pi i (f - f_0) \tau} d\tau \\ &= \hat{x}_h(t, f - f_0), \quad \text{für } z = M_{f_0} x.\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}\hat{z}_h(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} (T_{t_0} x)(\tau) h(\tau - t) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t_0) h(\tau - t) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(\tau - t + t_0) e^{-2\pi i f (\tau + t_0)} d\tau \\ &= e^{-2\pi i f t_0} \hat{x}_h(t - t_0, f), \quad \text{für } z = T_{t_0} x.\end{aligned}\tag{12}$$

Die dritte Eigenschaft folgt aus

$$\begin{aligned}\hat{z}_h(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} (T_{t_0} M_{f_0} x)(\tau) h(\tau - t) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &\stackrel{(10)}{=} e^{-2\pi i f_0 t_0} \int_{-\infty}^{\infty} (M_{f_0} T_{t_0} x)(\tau) h(\tau - t) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &\stackrel{(11)}{=} e^{-2\pi i f_0 t_0} \int_{-\infty}^{\infty} (T_{t_0} x)(\tau) h(\tau - t) e^{-2\pi i (f - f_0) \tau} d\tau \\ &\stackrel{(12)}{=} e^{-2\pi i f_0 t_0} e^{-2\pi i (f - f_0) t_0} \hat{x}_h(t - t_0, f - f_0) \\ &= e^{-2\pi i f t_0} \hat{x}_h(t - t_0, f - f_0), \quad \text{für } z = T_{t_0} M_{f_0} x.\end{aligned}$$

- (c) Wir setzen $h_t(\tau) = h(\tau - t)$ für beliebiges, aber festes, $t \in \mathbb{R}$ mit zugehöriger Fouriertransformation $\hat{h}_t(f)$, und schreiben die Kurzzeit-Fouriertransformation von $x(t)$ als

$$\begin{aligned}\hat{x}_h(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_t(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\rho) \hat{h}_t(f - \rho) d\rho\end{aligned}\quad (13)$$

$$\begin{aligned}&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\rho) \hat{h}(f - \rho) e^{-2\pi i (f - \rho)t} d\rho \\ &= e^{-2\pi i f t} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\rho) \hat{h}(f - \rho) e^{2\pi i \rho t} d\rho,\end{aligned}\quad (14)$$

wobei wir in (13) verwendet haben, dass dem Produkt von Signalen im Zeitbereich eine Faltung im Frequenzbereich entspricht, und in (14), dass die Fouriertransformierte von $h_t(\tau)$ durch $e^{-2\pi i f t} \hat{h}(f)$ entspricht (siehe Transformationstabelle).

- (d) Aus $\hat{x}(f) = \frac{1}{2i}(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$ und $\hat{h}(f) = \sin(\pi T_0 f)/(\pi T_0 f) = \text{sinc}(T_0 f)$ ergibt sich zusammen mit dem Ausdruck der Kurzzeit-Fouriertransformation als Funktion der Spektren, dass

$$\begin{aligned}\hat{x}_h(t, f) &= e^{-2\pi i f t} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\rho) \hat{h}(f - \rho) e^{2\pi i \rho t} d\rho \\ &= e^{-2\pi i f t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2i} (\delta(\rho - f_0) - \delta(\rho + f_0)) \text{sinc}(T_0(f - \rho)) e^{2\pi i \rho t} d\rho \\ &= \frac{e^{-2\pi i f t}}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\rho - f_0) \text{sinc}(T_0(f - \rho)) e^{2\pi i \rho t} d\rho \\ &\quad - \frac{e^{-2\pi i f t}}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\rho + f_0) \text{sinc}(T_0(f - \rho)) e^{2\pi i \rho t} d\rho \\ &= \hat{g}_+(t, f) - \hat{g}_-(t, f),\end{aligned}$$

wobei wir

$$\hat{g}_{\pm}(t, f) := \frac{\text{sinc}(T_0(f \mp f_0)) e^{-2\pi i (f \mp f_0)t}}{2i}$$

gesetzt haben. Ferner erhalten wir aus

$$\lim_{T_0 \rightarrow 0} \hat{g}_{\pm}(t, f) = \frac{e^{-2\pi i (f \mp f_0)t}}{2i}$$

den Grenzwert

$$\begin{aligned}\lim_{T_0 \rightarrow 0} \hat{x}_h(t, f) &= \frac{e^{-2\pi i (f - f_0)t} - e^{-2\pi i (f + f_0)t}}{2i} \\ &= e^{-2\pi i f t} \sin(2\pi f_0 t) \\ &= (M_{-f} x)(t).\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann folgendermassen interpretiert werden. Im Limes $T_0 \rightarrow 0$ wird die Fensterfunktion $h(t)$ zu einer Dirac-Funktion: $\lim_{T_0 \rightarrow 0} h(t) = \delta(t)$,

und deshalb bekommen wir

$$\begin{aligned}\hat{x}_\delta(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau - t)e^{-2\pi if\tau} d\tau \\ &= (M_{-f}x)(t).\end{aligned}$$

5. Aufgabe

(a) Wir setzen

$$\begin{aligned}x_1[n] &:= x^*[-n], \\x_2[n] &:= x[n],\end{aligned}$$

und erhalten

$$(x_1 * x_2)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m] \quad (15)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*[-m]x[n-m] \quad (16)$$

$$\stackrel{m' := -m}{=} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} x^*[m']x[m'+n] \quad (17)$$

$$= r_x[n]. \quad (18)$$

(b) Aus den Annahmen an das Signal $x[n]$ erhalten wir

$$r_x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*[m]x[m+n] = \sum_{m=0}^{1023} x^*[m]x[m+n]. \quad (19)$$

- Ist nun $n < -1023$, so folgt $m+n < 0$ und somit $x[m+n] = 0$ auf der rechten Seite von (19), für alle $m = 0, \dots, 1023$, und damit $r_x[n] = 0$.
- Ist $n > 1023$, so folgt $m+n > 1023$ und somit $x[m+n] = 0$ auf der rechten Seite von (19), für alle $m = 0, \dots, 1023$, und damit $r_x[n] = 0$.

Insgesamt erhalten wir also $r_x[n] = 0$ für alle n mit $n < -1023$ bzw. mit $n > 1023$. Folglich hat das Signal $r_x[n]$ die Länge $L = 2047$ (wobei $n_0 = -1023$).

(c) Aus $|\hat{x}_N[k]|^2 = \hat{x}_N[k]\hat{x}_N^*[k]$, für $k = 0, \dots, N-1$, erhalten wir mit Hilfe der DFT-Formeln

$$\begin{aligned}y^*[-n] &\circ \bullet \hat{y}^*[k] \\ \sum_{m=0}^{N-1} y_1[m]y_2[n-m] &\circ \bullet \hat{y}_1[k]\hat{y}_2[k]\end{aligned}$$

die Beziehung

$$g_N[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_p[m]x_p^*[m-n], \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (20)$$

wobei $x_p[n]$ die N -periodische Fortsetzung des Signals $x[n]$ ist, d.h., $x_p[n] = x[n]$, für $n = 0, \dots, N-1$, und $x_p[n+N] = x[n]$.

(d) Für $n = 0, 1, 2$ erhalten wir aus (20)

$$\begin{aligned}g_N[0] &= x[0]x^*[0] + x[1]x^*[1] + \dots + x[1023]x^*[1023] \\g_N[1] &= x[0]x^*[N-1] + x[1]x^*[0] + x[2]x^*[1] + \dots + x[1023]x^*[1022] \\g_N[2] &= x[0]x^*[N-2] + x[1]x^*[N-1] + x[2]x^*[0] + \dots + x[1023]x^*[1021].\end{aligned}$$

Hier wurde die N -Periodizität von $x_p[n]$ verwendet. Ein Vergleich mit dem Ausdruck

$$r_x[n] = \sum_{m=0}^{1023} x^*[m]x[m+n]$$

ergibt nun: $g_N[0] = r_x[0]$ für beliebiges N (mit $N \geq 1024$), $g_N[1] = r_x[1]$ falls $x[N-1] = 0$, und $g_N[2] = r_x[2]$ falls $x[N-1] = x[N-2] = 0$. Da nach Annahme gilt, dass $x[n] = 0$ für alle $n > 1023$, erhalten wir also die Bedingung $N-2 > 1023$, das heisst $N > 1025$.

- (e) Indem wir das Schema aus Teilaufgabe (d) fortsetzen erhalten wir die Bedingungen $x[N-1] = x[N-2] = \dots = x[N-1023] = 0$, das heisst, für $N \geq 2047$ gilt $g_N[n] = r_x[n]$ für alle $n = 0, \dots, 1023$. Da $r_x[n] = 0$ für alle $n > 1023$ bzw. $n < -1023$ bleiben noch die Werte von $r_x[n]$ für $n = -1023, \dots, -1$ zu bestimmen. Dies erfolgt am einfachsten unter Berücksichtigung der Symmetrie

$$r_x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*[m]x[m+n] \stackrel{m':=m+n}{=} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} x^*[m'-n]x[m'] = r_x^*[-n]$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Da wir $r_x[n]$ für $n = 0, \dots, 1023$ bereits bestimmt haben, erhalten wir somit alle übrigen Werte von $r_x[n]$ gemäss $r_x^*[-n] = r_x[n]$, $n = 0, \dots, 1023$.