Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
16. August 2016

Bitte beachten Sie:

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung erlaubt sind die Transformationstabellen, die Sie von uns erhalten. Die Benutzung von Rechnern/Smartphones/Tablets jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen Sie darauf hin, dass Studierende bei unehrlichem Handeln während der Prüfung den Strafnormen der Disziplinarordnung RSETHZ 361.1 der ETHZ unterstehen.

Vor der Klausur:

1. Dieses Angabenheft hat 8 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen ausschliesslich auf die bereitgestellten leeren Blätter. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie weitere Blätter.

Nach der Klausur:

5. Nummerieren Sie die Lösungsblätter und beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen. Tragen Sie die Anzahl der Lösungsblätter (exklusive der Aufgabenblätter), die Sie abgeben möchten, auf dieser Seite unten ein und unterschreiben Sie. Alle Aufgabenblätter müssen abgegeben werden.

Nachname: .... Vorname: ....

Legi-Nr.: ....

Anzahl abgegebener Lösungsblätter: ....

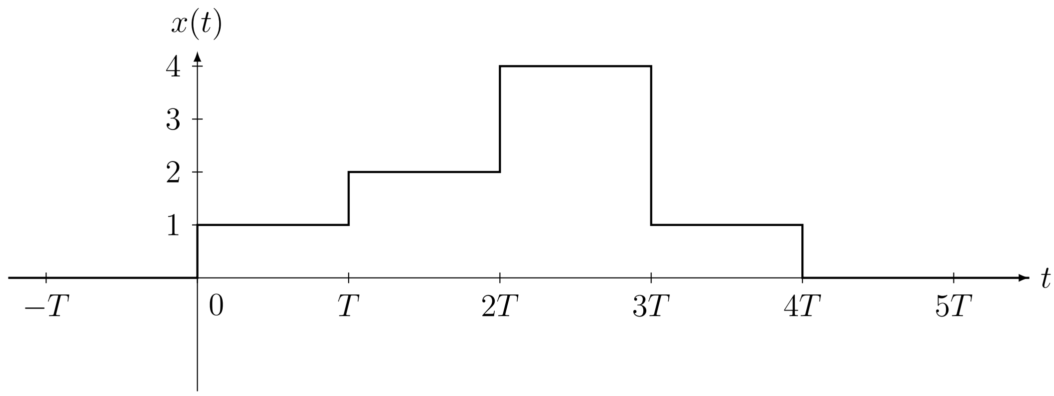
Unterschrift: ....

1. **Aufgabe** (25 Punkte) In diesem Beispiel soll die Abtastung von Signalen der folgenden Form untersucht werden:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \phi(t - nT), \tag{1}$$

wobei $\phi(t)$ eine beliebige zeitkontinuierliche Funktion ist. Signale der Form (1) können, auch wenn sie nicht bandbegrenzt sind, unter sehr allgemeinen Bedingungen aus ihren Abtastwerten rekonstruiert werden.

Betrachten Sie für die folgenden drei Teilaufgaben (a)-(c) das abgebildete Signal $x(t)$.



(a) (3 Punkte) Geben Sie für das abgebildete Signal $x(t)$ die Koeffizienten c_n, $n \in \mathbb{Z}$, und die Funktion $\phi(t)$ in der Darstellung (1) an.

(b) (3 Punkte) Geben Sie an, ob das abgebildete Signal $x(t)$ bandbegrenzt ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) (3 Punkte) Erläutern Sie wie das abgebildete Signal bei bekanntem, und gemäss Teilaufgabe (a) bestimmtem, $\phi(t)$ aus seinen Abtastwerten $x(nT+T/2)$, $n \in \mathbb{Z}$, rekonstruiert werden kann.

Für die restlichen Teilaufgaben sei $x(t)$ ein allgemeines zeitkontinuierliches Signal der Form (1).

(d) (6 Punkte) Es soll nun eine Methode zur Berechnung der Koeffizientenfolge c_n, $n \in \mathbb{Z}$, bei bekanntem $\widehat{x}(f)$ und bei bekanntem $\widehat{\phi}(f)$ entwickelt werden. Nehmen Sie dazu an, dass $\widehat{\phi}(f) \neq 0$, für alle $f \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Koeffizienten c_n, $n \in \mathbb{Z}$, als Funktion von $\widehat{x}(f)$ und $\widehat{\phi}(f)$ an.

(e) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Abtastwerte $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, gewonnen werden können durch Filterung der Koeffizientenfolge c_n, $n \in \mathbb{Z}$, mit einem zeitdiskreten LTI-System. Geben Sie den Frequenzgang dieses LTI-Systems an.

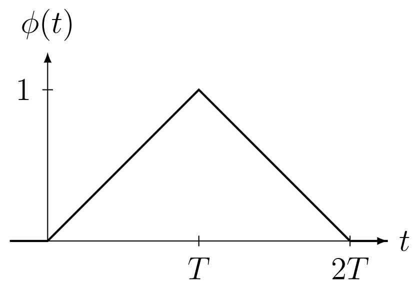
(f) (7 Punkte) In der Praxis ist es oft notwendig das Signal $x(t)$ überabzutasten. Es werden also zum Beispiel die Abtastfolgen $x(nT)$ und $x\big(nT+\frac{T}{2}\big)$ gebildet. Geben Sie für $\phi(t)$ wie unten abgebildet die Frequenzgänge $\hat{h}_1(\theta)$ und $\hat{h}_2(\theta)$ an, sodass

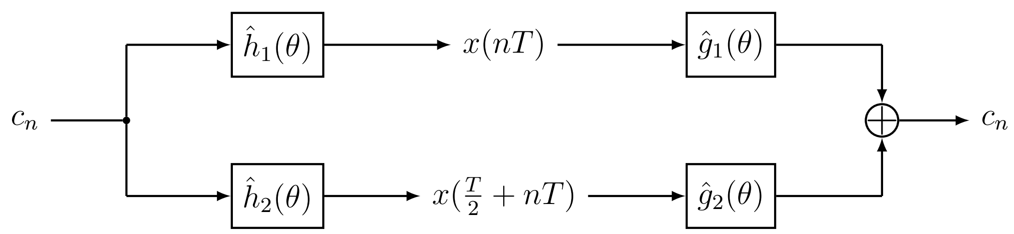
$$(c * h_1)(n) = x(nT), \quad n \in \mathbb{Z},$$

und

$$(c * h_2)(n) = x\Big(nT + \frac{T}{2}\Big), \quad n \in \mathbb{Z},$$

wobei $c[n] := c_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie ferner, gemäss dem unten abgebildeten Blockschaltbild, die Frequenzgänge $\hat{g}_1(\theta)$ und $\hat{g}_2(\theta)$, die perfekte Rekonstruktion der Koeffizienten c_n aus den Abtastwerten $x(nT)$ und $x\big(nT+\frac{T}{2}\big)$ liefern.





2. **Aufgabe** (25 Punkte) Die Autokorrelation eines Signals ist ein Mass dafür, wie sehr ein Signal seinen zeitverschobenen Versionen ähnelt. Für ein analoges Signal $x(t)$ ist die Autokorrelation definiert durch

$$(Ax)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x^*(\tau - t)\mathrm{d}\tau. \tag{2}$$

(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Autokorrelation (2) des Signals

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(b) (6 Punkte) Interpretieren Sie (2) als ein System welches auf das Eingangssignal $x(t)$ mit dem Ausgangssignal $(Ax)(t)$ antwortet. Überprüfen Sie dieses System A auf Linearität, Zeitinvarianz und BIBO-Stabilität. Begründen Sie Ihre Antworten!

(c) (5 Punkte) Der Träger (engl. *support*) eines analogen Signals $x(t)$ ist definiert durch

$$\text{supp}(x) = \{t \in \mathbb{R} \mid x(t) \neq 0\}.$$

Gegeben sei eine Familie $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ von analogen Signalen $x_k(t)$ mit

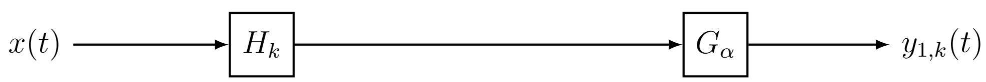
$$\text{supp}(x_k) \subseteq [k - L, k + L], \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

wobei $L \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl ist. Bestimmen Sie ein von k unabhängiges $R \in \mathbb{N}$, sodass

$$\text{supp}(Ax_k) \subseteq [-R, R], \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Betrachten Sie in den folgenden Teilaufgaben die beiden Systeme:

System I:



System II:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H_k} \longrightarrow \boxed{|\cdot|^2} \longrightarrow \boxed{G_\alpha} \longrightarrow y_{2,k}(t)$$

Hierbei ist $x(t)$ ein analoges Signal mit Spektrum

$$\widehat{x}(f) = \begin{cases} 1, & |f| > 2, \\ 0, & |f| \leq 2, \end{cases}$$

und H_k, $k \in \mathbb{Z}$, ein zeitkontinuierliches LTI-System mit Impulsantwort

$$h_k(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} e^{2\pi i k t}.$$

Ferner antwortet das System $|\cdot|^2$ auf ein Eingangssignal $x(t)$ mit dem Ausgangssignal $|x(t)|^2$. Das Tiefpassfilter G_α habe den Frequenzgang

$$\widehat{g_\alpha}(f) = \begin{cases} \alpha, & |f| \leq 2, \\ 0, & |f| > 2, \end{cases}$$

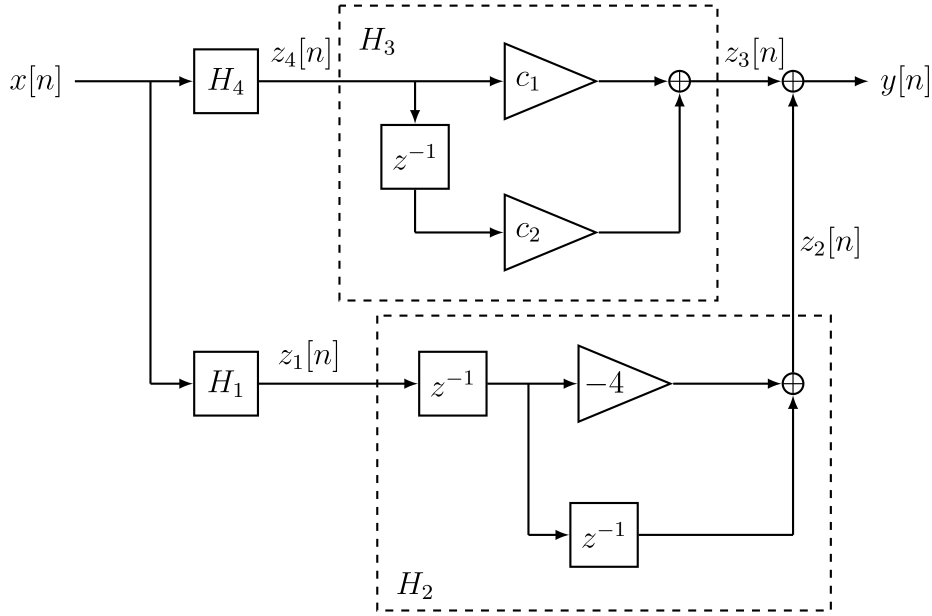
mit $\alpha > 0$.

(d) (3 Punkte) Bestimmen Sie für das System I diejenigen $k \in \mathbb{Z}$, sodass $y_{1,k}(t) = 0$, für alle $t \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Die Lösung lässt sich gut grafisch bestimmen.

(e) (7 Punkte) Bestimmen Sie für das System II diejenigen $k \in \mathbb{Z}$, sodass $y_{2,k}(t) = 0$, für alle $t \in \mathbb{R}$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe (d) und interpretieren Sie diesen Vergleich.

3. **Aufgabe** (25 Punkte)

Wir betrachten das folgende zeitdiskrete LTI-System.



(a) (10 Punkte) Es seien $x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$ und $z_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \sigma[n]$. Bestimmen Sie den Frequenzgang $\hat{h}_1(\theta)$ und die Impulsantwort $h_1[n]$ des Systems H_1, sowie die zu H_1 gehörige Differenzengleichung und das zugehörige Blockschaltbild.

(b) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_3[n]$ von H_3. Für welche Werte von c_1 und c_2 ist das System H_3 garantiert BIBO-stabil?

(c) (5 Punkte) Es seien $x[n]$ und $z_1[n]$ wie in Teilaufgabe (a), sowie $y[n] = 3\delta[n] + \frac{9}{2}\delta[n-1] - 5\delta[n-2]$ und es habe das System H_4 die Impulsantwort $h_4[n] = \delta[n]$. Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_2[n]$ des Systems H_2, sowie $z_2[n]$, $z_3[n]$, c_1 und c_2.

(d) (5 Punkte) Es habe nun H_4 den Frequenzgang

$$\hat{h}_4(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{für } \theta \in [0, 1/4] \cup [3/4, 1], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und es seien $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, sowie $x[n] = e^{2\pi i \theta_0 n}$ und H_1 beliebig. Bestimmen Sie $|z_3[n]|$ als Funktion von $\theta_0 \in [0, 1)$. Für welche Parameter θ_0 und für welche $n \in \mathbb{Z}$ nimmt $|z_3[n]|$ den maximalen Wert an? Wie gross ist dieser maximale Wert?

4. **Aufgabe** (25 Punkte) Wir betrachten ein periodisches zeitdiskretes Signal $x[n]$ mit Periode N, das heisst es gilt $x[n] = x[n + \ell N]$, für jedes $\ell \in \mathbb{Z}$ und für alle $n \in \mathbb{Z}$. Sei $X[k]$ die diskrete Fourier-Transformierte (DFT) von $x[n]$, gegeben durch

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn}, \qquad \text{wobei} \quad \omega_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}.$$

Die Beziehung zwischen $x[n]$ und seiner DFT $X[k]$ lässt sich in Matrixschreibweise darstellen als

$$\begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix},$$

wobei der Eintrag in der k-ten ($k = 1, 2, \ldots, N$) Zeile und ℓ-ten ($\ell = 1, 2, \ldots, N$) Spalte von $\mathbf{F}$ gegeben ist durch $\omega_N^{(k-1)(\ell-1)}$, also

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \omega_N^{(k-1)(\ell-1)} & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2N-2} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}.$$

(a) (7 Punkte) Zeigen Sie die Gültigkeit der Gleichung

$$\frac{1}{N}\mathbf{F}^H\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

wobei $\mathbf{F}^H$ die Matrix bezeichnet, die man aus $\mathbf{F}$ durch Transposition und komplexe Konjugation aller Einträge erhält. Zeigen Sie des Weiteren, dass aus (3) folgt

$$\begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix} = \frac{1}{N}\mathbf{F}^H \begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Im Folgenden betrachten wir ein N-periodisches Signal $x[n]$ von dem nur die ersten T Werte $\{x[0], x[1], \ldots, x[T-1]\}$, mit $T < N$, bekannt sind. Es soll ein Verfahren ermittelt werden mit dem unter zusätzlichen Annahmen über $x[n]$ die übrigen Werte von $x[n]$ rekonstruiert werden können.

(b) (10 Punkte) In dieser Teilaufgabe nehmen wir an, dass $x[n]$ die Eigenschaft hat, dass höchstens K Werte seiner DFT $X[k]$ von Null verschieden sind. Das bedeutet, dass es eine Menge $I = \{k_1, \ldots, k_K\}$ gibt, sodass $X[k] = 0$ für alle $k \notin I$. Des Weiteren nehmen wir an, dass diese Menge I bekannt ist. Wie gross muss T mindestens sein, damit die Rekonstruktion der fehlenden Werte $\{x[T], \ldots, x[N-1]\}$ immer, d.h., unabhängig von den Werten von $X[k_1], ..., X[k_K]$, möglich ist? Geben Sie ein zugehöriges Verfahren zur Rekonstruktion der Werte $\{x[T], \ldots, x[N-1]\}$ an. Sie dürfen dazu annehmen, dass jede quadratische Submatrix von $\mathbf{F}^H$ invertierbar ist.

(c) (8 Punkte) Betrachten Sie nun das N-periodische Signal $x[n] = \sin^3(2\pi n/N)$.

i. Berechnen Sie die DFT $X[k]$ von $x[n]$ für allgemeines N. (Es reicht hier die Darstellung von $X[k]$ als Summe von Kronecker-Deltas).

ii. Bestimmen sie *explizit* die Werte von $X[k]$ für die Spezialfälle $N = 4$, $N = 6$, und $N = 8$. Es sei nun T die Anzahl der bekannten Einträge von $x[n]$ aus Teilaufgabe (b). Wie gross muss T für die jeweiligen Spezialfälle $N = 4, 6, 8$ mindestens sein, damit die restlichen Einträge $\{x[T], \ldots, x[N-1]\}$ rekonstruiert werden können?