

Lösung zur Klausur zu Signal- und Systemtheorie I 16. August 2016

1. Aufgabe

(a) Für das abgebildete Signal $x(t)$ ergeben sich

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, T], \\ 0, & t \notin (0, T], \end{cases}$$

und die Koeffizienten

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 2, \quad c_2 = 4, \quad c_3 = 1,$$

sowie $c_n = 0$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$.

(b) Das abgebildete Signal $x(t)$ ist nicht bandbegrenzt. Dies sieht man an den folgenden zwei Argumenten, die beide zur vollen Punktezahl führen:

- Das Signal $x(t)$ hat endlichen Träger (d.h. endliche Länge) und kann damit nicht bandbegrenzt sein.
- Mit Hilfe der Transformationstabelle ergibt sich

$$\hat{\phi}(f) = \frac{\sin(\pi T f)}{\pi f} e^{-\pi i T f}.$$

Fouriertransformation von $x(t)$ liefert nun

$$\hat{x}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-2\pi i f n T} \hat{\phi}(f) = \sum_{n=0}^3 c_n e^{-\pi i T f (2n+1)} \frac{\sin(\pi T f)}{\pi f},$$

woraus ersichtlich ist, dass $\hat{x}(f)$ unendlichen Träger hat.

(c) Es gilt

$$x(nT + T/2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \underbrace{\phi(nT + T/2 - kT)}_{= \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}} = c_n.$$

Damit ergibt sich

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \phi(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT + T/2) \phi(t - nT).$$

(d) Mit Hilfe der Transformationstabelle erhalten wir

$$\hat{x}(f) = \hat{\phi}(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-2\pi i n f T}.$$

Da nach Voraussetzung $\hat{\phi}(f) \neq 0$, für alle $f \in \mathbb{R}$, können wir die Funktion

$$g(f) := \frac{\hat{x}(f)}{\hat{\phi}(f)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-2\pi i n f T} \quad (1)$$

definieren. Diese Funktion ist $\frac{1}{T}$ -periodisch, d.h.,

$$g\left(f + \frac{1}{T}\right) = g(f), \quad f \in \mathbb{R},$$

und hat somit eine Fourierreihendarstellung

$$g(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{-2\pi i n f T} \quad (2)$$

mit Fourierreihenkoeffizienten

$$d_n = T \int_0^{1/T} g(f) e^{2\pi i n f T} df, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Mittels Koeffizientenvergleich zwischen (1) und (2) folgt, dass

$$c_n = d_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

und somit

$$c_n = d_n = T \int_0^{1/T} g(f) e^{2\pi i n f T} df = T \int_0^{1/T} \frac{\hat{x}(f)}{\hat{\phi}(f)} e^{2\pi i n f T} df, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Damit haben wir, wie verlangt, c_n als Funktion von $\hat{x}(f)$ und $\hat{\phi}(f)$ ausgedrückt.

(e) Wir definieren $c[n] := c_n, n \in \mathbb{Z}$, und

$$h[n] := \phi(nT), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Damit folgt

$$x(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi(nT - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c[k] h[n - k] = (c * h)[n].$$

Der Frequenzgang $\hat{h}(\theta)$ des LTI-Systems ist somit durch

$$\hat{h}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-2\pi i n \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(nT) e^{-2\pi i n \theta}$$

gegeben.

(f) Aus Teilaufgabe (e) folgt, dass

$$h_1[n] := \phi(nT), \quad n \in \mathbb{Z},$$

mit Frequenzgang

$$\hat{h}_1(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1[n] e^{-2\pi i n \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(nT) e^{-2\pi i n \theta} = e^{-2\pi i \theta},$$

wobei wir im letzten Schritt die konkrete Form von $\phi(t)$ benutzt haben. Ferner gilt

$$x(nT + T/2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi(nT + T/2 - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c[k] h_2[n - k] = (c * h_2)[n],$$

mit

$$h_2[n] := \phi(nT + T/2), \quad n \in \mathbb{Z},$$

und mit zugehörigem Frequenzgang

$$\hat{h}_2(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_2[n] e^{-2\pi i n \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(nT + T/2) e^{-2\pi i n \theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2\pi i \theta},$$

wobei wir im letzten Schritt wieder die konkrete Form von $\phi(t)$ benutzt haben.

Die Bedingung

$$\hat{h}_1(\theta) \hat{g}_1(\theta) + \hat{h}_2(\theta) \hat{g}_2(\theta) = 1, \quad \forall \theta \in [0, 1),$$

garantiert perfekte Rekonstruktion. Damit gilt

$$e^{-2\pi i \theta} \hat{g}_1(\theta) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2\pi i \theta} \right) \hat{g}_2(\theta) = 1.$$

Es gibt unendlich viele Paare von Funktionen $\hat{g}_1(\theta)$ und $\hat{g}_2(\theta)$, die diese Bedingung erfüllen. Ein Paar ist, z.B.,

$$\hat{g}_1(\theta) = -1, \quad \hat{g}_2(\theta) = 2,$$

sodass

$$g_1[n] = -\delta[n], \quad g_2[n] = 2\delta[n].$$

2. Aufgabe

- (a) Das Signal $x(t)$ ist reellwertig und gerade. Damit folgt

$$(Ax)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x^*(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x(t - \tau) d\tau = (x * x)(t).$$

Somit läuft die Berechnung von $(Ax)(t)$ auf eine Faltung hinaus, die wir zum Beispiel grafisch durchführen können. Das Ergebnis lautet

$$(Ax)(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

- (b) • Linearität: Das System A ist nicht linear. Um dies zu sehen, zeigen wir, dass A nicht homogen ist. Hierfür stellen wir fest, dass es mindestens ein Signal $x(t) \neq 0$ gibt, für das $(Ax)(t) \neq 0$ (z.B. $x(t)$ aus Teilaufgabe (a)) und somit für alle $\alpha \neq 0$:

$$(A(\alpha x))(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha x(\tau) \alpha^* x^*(\tau - t) d\tau = |\alpha|^2 (Ax)(t) \neq \alpha (Ax)(t).$$

- Zeitinvarianz: Es sei $(T_c x)(t) := x(t - c)$, für alle $t, c \in \mathbb{R}$. Das System A ist zeitvariant, wegen

$$\begin{aligned} (A(T_c x))(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (T_c x)(\tau) (T_c x)^*(\tau - t) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - c) x^*(\tau - t - c) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - c) x^*((\tau - c) - t) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(y) x^*(y - t) dy = (Ax)(t) \neq (T_c(Ax))(t), \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung zum Beispiel für das Signal $x(t)$ aus Teilaufgabe (a) und für alle $c \neq 0$ erfüllt ist.

- BIBO-Stabilität: Das System A ist nicht BIBO-stabil, denn für das beschränkte Eingangssignal $x(t) = 1, t \in \mathbb{R}$, gilt

$$|(Ax)(t)| = \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Damit haben wir ein beschränktes Eingangssignal gefunden, das zu einem unbeschränkten Ausgangssignal führt.

- (c) Es gilt

$$(Ax_k)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_k(\tau) x_k^*(\tau - t) d\tau. \quad (3)$$

Das Integral (3) ist gleich Null, wenn sich die Träger der Funktionen $x_k(\cdot)$ und $x_k^*(\cdot - t)$ nicht überlappen. Nach Voraussetzung haben wir

$$\text{supp}(x_k) \subseteq [k - L, k + L], \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

und somit

$$\text{supp}(x_k(\cdot - t)) \subseteq [k - L + t, k + L + t], \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Es gilt

$$[k - L, k + L] \cap [k - L + t, k + L + t] = \emptyset,$$

für $|t| \geq 2L$. Damit folgt

$$(Ax_k)(t) = 0, \quad |t| \geq 2L,$$

sodass wir $R = 2L$ setzen können.

(d) Um die Systemantworten $(H_k x)(t)$ zu bestimmen, definieren wir

$$z_k(t) := (H_k x)(t) = (x * h_k)(t), \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

und erhalten weiter

$$\widehat{z}_k(f) = \widehat{x}(f) \cdot \widehat{h}_k(f), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Aus der Transformationstabelle ergibt sich

$$\widehat{h}_k(f) = \begin{cases} 1, & |f - k| \leq 1, \\ 0, & |f - k| > 1, \end{cases}$$

für $k \in \mathbb{Z}$, woraus mit Hilfe von (4) und der Definition von $x(t)$ folgt:

- Für $k \in \{-1, 0, 1\}$ haben wir $\widehat{z}_k(f) = 0$, $f \in \mathbb{R}$
- Für die restlichen Werte von $k \in \mathbb{Z}$ hat $\widehat{z}_k(f)$ Anteile, die ungleich Null sind, nur für $|f| > 2$.

Somit folgt, dass

$$\widehat{y_{1,k}}(f) = \widehat{z}_k(f) \widehat{g_\alpha}(f) = 0, \quad f \in \mathbb{R},$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$, und damit $y_{1,k} = 0$, für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(e) Wir gehen wie in Teilaufgabe (d) vor und erhalten:

- Für $k \in \{-1, 0, 1\}$ haben wir $\widehat{z}_k(f) = 0$, $f \in \mathbb{R}$
- Für $k = 2$ haben wir

$$\widehat{z}_2(f) = \begin{cases} 1, & f \in (2, 3], \\ 0, & f \notin (2, 3] \end{cases}$$

- Für $k = -2$ haben wir

$$\widehat{z}_{-2}(f) = \begin{cases} 1, & f \in [-3, -2), \\ 0, & f \notin [-3, -2) \end{cases}$$

- Für $k = 3$ haben wir

$$\widehat{z}_3(f) = \begin{cases} 1, & f \in (2, 4], \\ 0, & f \notin (2, 4] \end{cases}$$

- Für $k = -3$ haben wir

$$\hat{z}_k(f) = \begin{cases} 1, & f \in [-4, -2), \\ 0, & f \notin [-4, -2) \end{cases}$$

- Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ erhalten wir

$$\hat{z}_k(f) = \begin{cases} 1, & |f - k| \leq 1, \\ 0, & |f - k| > 1. \end{cases}$$

Um die Wirkung des quadrierten Modulus $|\cdot|^2$ zu bestimmen, definieren wir nun

$$q_k(t) := |z_k(t)|^2 = z_k(t)z_k^*(t), \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

und erhalten mit Hilfe der Transformationstabelle

$$\hat{q}_k(f) = (A\hat{z}_k)(f), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

wobei A der in (2) definierte Autokorrelations-Operator ist, aber hier im Frequenzbereich angewendet wird. Wir verwenden nun das Ergebnis aus Teilaufgabe (c) und erhalten

$$\text{supp}(A\hat{z}_k) \subseteq [-2, 2], \quad (6)$$

für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$, sowie $\text{supp}(A\hat{z}_k) = \emptyset$, für $k \in \{-1, 0, 1\}$. Es folgt nun, dass

$$\widehat{y_{2,k}}(f) = \hat{q}_k(f)\hat{g}_\alpha(f) = 0, \quad f \in \mathbb{R},$$

für $k \in \{-1, 0, 1\}$. Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ bildet der Autokorrelations-Operator A die Signale $\hat{z}_k$ in das „Sichtfeld“ des Tiefpassfilters G_α ab und damit ist $y_{2,k} \neq 0$.

Die Nichtlinearität $|\cdot|^2$ wirkt somit als Demodulation, die Signale zu den tieferen Frequenzen „schiebt“. Diese niedrigfrequenten Signale können dann —anders als im System I in Teilaufgabe (d)—im System II durch das Tiefpassfilter G_α „gesehen“ werden.

3. Aufgabe

- (a) Die Eingangs-Ausgangsbeziehung von H_1 lautet im Frequenzbereich

$$\hat{z}_1(\theta) = \hat{h}_1(\theta)\hat{x}(\theta),$$

sodass $\hat{h}_1(\theta)$ bestimmt werden kann gemäss

$$\hat{h}_1(\theta) = \frac{\hat{z}_1(\theta)}{\hat{x}(\theta)}.$$

Mittels Formelsammlung finden wir

$$\begin{aligned} \hat{x}(\theta) &= 1 - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta} \\ \hat{z}_1(\theta) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-2\pi i\theta}} \end{aligned}$$

und damit

$$\hat{h}_1(\theta) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta}\right) \left(1 - \frac{1}{4}e^{-2\pi i\theta}\right)}. \quad (7)$$

Um $h_1[n]$ zu bestimmen vereinfachen wir (7) durch Partialbruchzerlegung wie folgt

$$\hat{h}_1(\theta) = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4}e^{-2\pi i\theta}}.$$

Durch Koeffizientenvergleich finden wir

$$\begin{aligned} A \left(1 - \frac{1}{4}e^{-2\pi i\theta}\right) + B \left(1 - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta}\right) &= 1 \\ \Rightarrow A + B &= 1 \\ \Rightarrow -\frac{A}{4} - \frac{B}{2} &= 0 \end{aligned}$$

und damit $B = -1, A = 2$, d.h.,

$$\hat{h}_1(\theta) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-2\pi i\theta}}.$$

Die Formelsammlung liefert nun

$$h_1[n] = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n \sigma[n].$$

Um die zu H_1 gehörige Differenzengleichung zu ermitteln, betrachten wir die Eingangs-Ausgangsbeziehung von H_1 im Frequenzbereich:

$$\hat{x}(\theta) = \frac{\hat{z}_1(\theta)}{\hat{h}_1(\theta)} = \left(1 - \frac{3}{4}e^{-2\pi i\theta} + \frac{1}{8}e^{-4\pi i\theta}\right) \hat{z}_1(\theta).$$

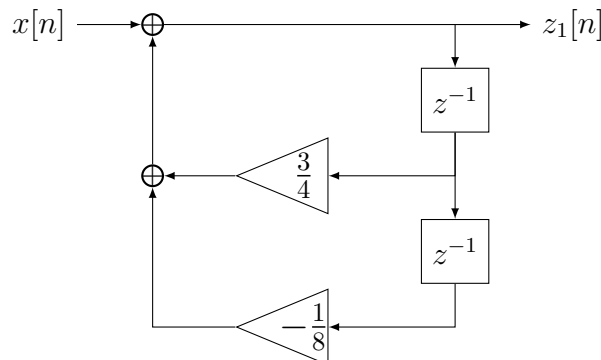
Dies entspricht im Zeitbereich

$$x[n] = z_1[n] - \frac{3}{4}z_1[n-1] + \frac{1}{8}z_1[n-2],$$

d.h., die System-Differenzengleichung ist gegeben durch

$$z_1[n] = x[n] + \frac{3}{4}z_1[n-1] - \frac{1}{8}z_1[n-2]$$

mit dem zugehörigen Blockschaltbild



(b) Die zu H_3 gehörige Differenzengleichung lautet

$$z_3[n] = c_1 z_4[n] + c_2 z_4[n-1]$$

und die Impulsantwort folgt damit direkt, für $z_4[n] = \delta[n]$, als

$$h_3[n] = c_1 \delta[n] + c_2 \delta[n-1].$$

Eine hinreichende Bedingung für BIBO-Stabilität eines zeitdiskreten LTI-Systems mit Impulsantwort $h[n]$ ist $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$. Für $h_3[n]$ erhalten wir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_3[n]| = |c_1| + |c_2|.$$

Daher ist H_3 sicher BIBO-stabil, wenn $|c_1| < \infty$ und $|c_2| < \infty$.

(c) Wir lesen aus dem Blockschaltbild ab, dass $h_2[n] = -4\delta[n-1] + \delta[n-2]$, und finden mittels Formelsammlung $\hat{h}_2(\theta) = -4e^{-2\pi i\theta} + e^{-4\pi i\theta}$. Mit $\hat{z}_1(\theta)$ aus Teilaufgabe (a) erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \hat{z}_2(\theta) &= \hat{h}_2(\theta) \hat{z}_1(\theta) \\ &= (-4e^{-2\pi i\theta} + e^{-4\pi i\theta}) \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-2\pi i\theta}} \\ &= -4e^{-2\pi i\theta} \end{aligned}$$

und mittels Formelsammlung $z_2[n] = -4\delta[n-1]$. Für $z_3[n]$ ergibt sich somit

$$\begin{aligned} z_3[n] &= y[n] - z_2[n] \\ &= 3\delta[n] + \frac{9}{2}\delta[n-1] - 5\delta[n-2] + 4\delta[n-1] \\ &= 3\delta[n] + \frac{17}{2}\delta[n-1] - 5\delta[n-2]. \end{aligned}$$

Die Eingangs-Ausgangsbeziehung von H_3 lautet im Frequenzbereich

$$\begin{aligned} \hat{z}_3(\theta) &= \hat{h}_3(\theta) \underbrace{\hat{h}_4(\theta)}_1 \hat{x}(\theta) \\ &= \hat{h}_3(\theta) \hat{x}(\theta) \end{aligned}$$

und somit gilt

$$\begin{aligned} 3 + \frac{17}{2}e^{-2\pi i\theta} - 5e^{-4\pi i\theta} &= (c_1 + c_2 e^{-2\pi i\theta}) \left(1 - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta}\right) \\ &= c_1 + \left(c_2 - \frac{c_1}{2}\right) e^{-2\pi i\theta} - \frac{c_2}{2} e^{-4\pi i\theta}. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir nun $c_1 = 3$, $c_2 = 10$.

(d) $x[n] = e^{2\pi i\theta_0 n}$ ist eine Eigenfunktion des Systems bestehend aus der Kaskade von H_4 und H_3 . Es reicht deshalb das Maximum im Betrag des Frequenzgangs $\hat{h}_3(\theta_0)\hat{h}_4(\theta_0)$ über alle $\theta_0 \in [0, 1)$ zu bestimmen. H_4 ist ein Bandpassfilter mit Durchlassbereich $[0, 1/4] \cup [3/4, 1]$. Somit folgt für $\theta_0 \in (1/4, 3/4)$, dass

$$|\hat{h}_3(\theta_0) \underbrace{\hat{h}_4(\theta_0)}_{=0}| = 0$$

und für $\theta_0 \in [0, 1/4] \cup [3/4, 1]$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 |\hat{h}_3(\theta_0) \underbrace{\hat{h}_4(\theta_0)}_{=1}| &= |1 - e^{-2\pi i \theta_0}| \\
 &= \sqrt{(1 - \cos(2\pi \theta_0))^2 + \sin^2(2\pi \theta_0)} \\
 &= \sqrt{1 - 2\cos(2\pi \theta_0) + \cos^2(2\pi \theta_0) + \sin^2(2\pi \theta_0)} \\
 &= \sqrt{1 - 2\cos(2\pi \theta_0) + 1} \\
 &= \sqrt{2(1 - \cos(2\pi \theta_0))}.
 \end{aligned}$$

Die Funktion $1 - \cos(2\pi \theta_0)$ nimmt auf dem Intervall $[0, 1/4]$ ihr Maximum 1 an für $\theta_0 = 1/4$, auf dem Intervall $[3/4, 1]$ hat sie ebenfalls das Maximum 1, welches für $\theta_0 = 3/4$ angenommen wird. Somit ist das Maximum von $|z_3[n]|$ über alle $\theta_0 \in [0, 1)$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gegeben durch $\sqrt{2}$ und wird angenommen und für $\theta_0 = 1/4$ und $\theta_0 = 3/4$, jeweils für alle $n \in \mathbb{Z}$.

4. Aufgabe

- (a) Es sei $\mathbf{f}_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$) die k -te Spalte von $\mathbf{F}$. Wie im Vorlesungsskriptum (Abschnitt 12.1) berechnen wir

$$\langle \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_\ell \rangle = \mathbf{f}_\ell^H \mathbf{f}_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} n(\ell-1)} e^{-\frac{2\pi i}{N} n(k-1)} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} n(\ell-k)}.$$

Für $k = \ell$ erhalten wir

$$\langle \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_\ell \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{e^0}_{=1} = N.$$

Für $k \neq \ell$ haben wir als Konsequenz der Summenformel für geometrische Reihen

$$\langle \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_\ell \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} n(\ell-k)} = \frac{e^{\frac{2\pi i}{N} N(\ell-k)} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{N}(\ell-k)} - 1} = \frac{e^{2\pi i(\ell-k)} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{N}(\ell-k)} - 1} = 0.$$

Damit ist die Beziehung (3) gezeigt. Aus $\mathbf{F}^H \mathbf{F} = N \cdot \mathbf{I}_N$, wobei $\mathbf{I}_N$ die $N \times N$ Identitätsmatrix bezeichnet, folgt durch Multiplikation mit $\mathbf{F}^{-1}$ von rechts, dass $\mathbf{F}^H/N = \mathbf{F}^{-1}$ und damit aus

$$\begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix}$$

das gewünschte Ergebnis

$$\begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \mathbf{F}^H \begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{pmatrix}.$$

(b) Aus $X[k] = 0$ für alle $k \notin \{k_1, \dots, k_K\}$ erhält man die Beziehung

$$\begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \mathbf{F}^H \begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} X[k_1] \\ X[k_2] \\ \vdots \\ X[k_K] \end{pmatrix}, \quad (8)$$

wobei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times K}$ die Matrix bezeichnet, die aus den Spalten von $\mathbf{F}^H/N$ mit Indizes in I besteht. Die Matrix $\mathbf{A}$ lässt sich darstellen als

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix},$$

wobei $\mathbf{A}_1$ eine $T \times K$ und $\mathbf{A}_2$ eine $(N - T) \times K$ Matrix ist. Mit dieser Aufteilung erhält man

$$\begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[T-1] \end{pmatrix} = \mathbf{A}_1 \begin{pmatrix} X[k_1] \\ X[k_2] \\ \vdots \\ X[k_K] \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Die Kenntnis der Werte von $x[n]$ ist äquivalent zur Kenntnis der Werte von $X[k]$. Das bedeutet, dass man die fehlenden Werte von $x[n]$ genau dann von den Werten $x[1], \dots, x[T-1]$ berechnen kann, wenn man $X[k_1], \dots, X[k_K]$ aus den Werten $x[1], \dots, x[T-1]$ berechnen kann. Es müssen also die Spalten der Matrix $\mathbf{A}_1$ linear unabhängig sein. Insbesondere muss $T \geq K$ gelten. Wir zeigen nun, dass für $T = K$ die fehlenden Werte von $x[n]$ bestimmt werden können. Für $T = K$ ist $\mathbf{A}_1$ eine quadratische, konkret eine $K \times K$, Submatrix von $\mathbf{F}^H/N$ und per Annahme invertierbar. Dies liefert

$$\begin{pmatrix} X[k_1] \\ X[k_2] \\ \vdots \\ X[k_K] \end{pmatrix} = \mathbf{A}_1^{-1} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[T-1] \end{pmatrix} \quad (10)$$

und Einsetzen in

$$\begin{pmatrix} x[T] \\ x[T+1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix} = \mathbf{A}_2 \begin{pmatrix} X[k_1] \\ X[k_2] \\ \vdots \\ X[k_K] \end{pmatrix}$$

ergibt

$$\begin{pmatrix} x[T] \\ x[T+1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^{-1} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[T-1] \end{pmatrix}.$$

- (c) i. Zuerst betrachten wir die Funktion $z(t) = \sin^3(t)$, welche man folgendermassen darstellen kann:

$$\begin{aligned} z(t) &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{e^{i3t} - e^{-i3t}}{2i} \right) \\ &= \frac{3}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \sin(3t). \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Linearität der DFT und Verwendung der Beziehung

$$\sin\left(\frac{2\pi k_0 n}{N}\right) \quad \circ \bullet \quad \frac{Ni}{2} (\delta[k + k_0 - N] - \delta[k - k_0])$$

für $k_0 = 1$ und $k_0 = 3$ ergibt sich daraus

$$X[k] = \frac{Ni}{8} (3\delta[k + 1 - N] - 3\delta[k - 1] - \delta[k + 3 - N] + \delta[k - 3]).$$

ii. Die DFT für die Spezialfälle ergibt sich folgendermassen:

$N = 4$: Aus

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{i}{2} (3\delta[k - 3] - 3\delta[k - 1] - \delta[k - 1] + \delta[k - 3]) \\ &= 2i\delta[k - 3] - 2i\delta[k - 1] \end{aligned}$$

erhalten wir $X[1] = -2i$, $X[3] = 2i$ und $X[0] = X[2] = 0$.

$N = 6$: Aus

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{3i}{4} (3\delta[k - 5] - 3\delta[k - 1] - \delta[k - 3] + \delta[k - 3]) \\ &= \frac{3i}{4} (3\delta[k - 5] - 3\delta[k - 1]) \end{aligned}$$

erhalten wir $X[1] = -9i/4$, $X[5] = 9i/4$ und $X[0] = X[2] = X[3] = X[4] = 0$.

$N = 8$: Aus

$$X[k] = 3i\delta[k - 7] - 3i\delta[k - 1] - i\delta[k - 5] + i\delta[k - 3]$$

erhalten wir $X[1] = -3i$, $X[3] = i$, $X[5] = -i$, $X[7] = 3i$ und $X[0] = X[2] = X[4] = X[6] = 0$.

T muss mindestens gleich der Anzahl der Einträge von $X[k]$ sein, die von Null verschieden sind. Also bekommen wir für

$N = 4$: $T = 2$.

$N = 6$: $T = 2$.

$N = 8$: $T = 4$.