

Klausur zu Signal- und Systemtheorie I

25. Januar 2017

Bitte beachten Sie:

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung erlaubt sind die Transformationstabellen, die Sie von uns erhalten. Die Benutzung von Rechnern/Smartphones/Tablets jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen Sie darauf hin, dass Studierende bei unehrlichem Handeln während der Prüfung den Strafnormen der Disziplinarordnung RSETHZ 361.1 der ETHZ unterstehen.

Vor der Klausur:

1. Dieses Angabenheft hat 8 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen ausschliesslich auf die bereitgestellten leeren Blätter. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie weitere Blätter.

Nach der Klausur:

5. Nummerieren Sie die Lösungsblätter und beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen. Tragen Sie die Anzahl der Lösungsblätter (exklusive der Aufgabenblätter), die Sie abgeben möchten, auf dieser Seite unten ein und unterschreiben Sie. Alle Aufgabenblätter müssen abgegeben werden.

Nachname: Vorname:

Legi-Nr.:

Anzahl abgegebener Lösungsblätter:

Unterschrift:

1. **Aufgabe** (25 Punkte) Es sei $B > 0$ fest. In dieser Aufgabe betrachten wir ein auf $[-B, B]$ band-begrenztes Signal $x \in L^2(\mathbb{R})$, d.h. $\hat{x}(f) = 0$ für alle $f \in \mathbb{R}$ mit $|f| > B$. Wir setzen $T = 1/(2B)$ und nehmen an, dass $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(nT)| < \infty$ und $\hat{x}$ auf $(-B, B)$ stetig differenzierbar ist.

- (a) (4 Punkte) Berechnen Sie die Fourierreihenkoeffizienten $c_n(y)$, $n \in \mathbb{Z}$, des Signals y , das gegeben ist durch

$$y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}(f - 2nB), \quad f \in \mathbb{R}.$$

- (b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Fourierreihendarstellung von y aus Teilaufgabe (a). Sie dürfen annehmen, dass die Fourierreihe von y in jedem Punkt $f \in (-B, B)$ gegen den Wert $y(f)$ konvergiert.

- (c) (3 Punkte) Sei $t \in \mathbb{R}$ fest. Berechnen Sie die Fourierreihenkoeffizienten $c_n(z)$, $n \in \mathbb{Z}$, des $2B$ -periodischen Signals z , das auf $(-B, B]$ gegeben ist durch

$$z(f) = e^{-2\pi i f t}.$$

- (d) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass für allgemeine $2B$ -periodische stückweise stetige Signale y und z die folgende Identität gilt:

$$\frac{1}{2B} \int_{-B}^B y(f) z^*(f) df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(y) c_n^*(z). \quad (1)$$

Hinweis: Sie dürfen die Reihenfolge der Summation und des Integrals ohne Begründung vertauschen.

- (e) (5 Punkte) Zeigen Sie, unter Verwendung der Fourierreihen von y aus Teilaufgabe (a) und von z aus Teilaufgabe (c), mit Hilfe der Identität (1), die folgende Interpolationsformel:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei

$$\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

- (f) (4 Punkte) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest, sodass $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(\alpha + nT)| < \infty$. Nehmen Sie an, dass das Signal x nicht mehr an den Zeitpunkten $nT, n \in \mathbb{Z}$, abgetastet wird, sondern an den Zeitpunkten $\alpha + nT, n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Identitäten gelten:

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\alpha + nT)$$

und

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\alpha + nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - \alpha - nT}{T}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Teilaufgaben (b) und (e).

2. **Aufgabe** (25 Punkte) Die Wavelet-Transformation wird häufig benutzt um Diskontinuitäten (d.h., Sprungstellen) in einem zeitkontinuierlichen Signal $x(t)$ zu finden. Für ein Signal $x(t)$ ist diese Transformation definiert als

$$W_\psi(x)(t, a) := \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \psi\left(\frac{\tau - t}{a}\right) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, a > 0, \quad (2)$$

wobei das zeitkontinuierliche Signal $\psi(t)$ (auch Wavelet genannt) die Wavelet-Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) d\tau = 0 \quad (3)$$

erfüllt.

- (a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Abbildung $x(t) \mapsto W_\psi(x)(t, a)$ für gegebenes Wavelet $\psi(t)$ linear ist.
- (b) (4 Punkte) Der Dilatationsoperator D_a und der Translationsoperator T_{t_0} sind definiert durch

$$(D_a x)(t) := a^{-1} x(t/a), \quad \text{und} \quad (T_{t_0} x)(t) := x(t - t_0). \quad (4)$$

Zeigen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$(T_{at_0} D_a x)(t) = (D_a T_{t_0} x)(t), \quad t, t_0 \in \mathbb{R}, a > 0.$$

- (c) (6 Punkte) Stellen Sie für gegebenes Wavelet $\psi(t)$ die Wavelet-Transformation (2) als Faltung dar, d.h., geben sie ein zeitkontinuierliches Signal $h(t)$ an (welches von $\psi(t)$ abhängen darf), sodass

$$W_\psi(x)(t, a) = (x * h)(t), \quad t \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Bestimmen Sie ferner die Fouriertransformation der Wavelet-Transformation (2) bezüglich der Variablen $t \in \mathbb{R}$, d.h., berechnen Sie, für festes $a > 0$, den Ausdruck $\hat{z}(f)$, wobei $z(t) := W_\psi(x)(t, a)$.

- (d) (2 Punkte) Gegeben sei ein Wavelet $\psi(t)$ mit $\hat{\psi}(0) = \pi$. Erfüllt dieses Wavelet die Wavelet-Eigenschaft (3)? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (e) (3 Punkte) Gegeben sei ein stetig differenzierbares Signal $g(t)$ mit kompaktem Träger, d.h., es existiert ein $R > 0$ sodass $g(t) = 0$, für $|t| > R$. Erfüllt das Signal $\psi(t) := (\frac{d}{dt}g)(t)$ die Wavelet-Eigenschaft (3)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Für die nächsten beiden Teilaufgaben betrachten wir das Haar Wavelet

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2), \\ -1, & t \in [1/2, 1), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(f) (2 Punkte) Skizzieren Sie $\psi(t)$. *Achten Sie auf die Beschriftung der Achsen!*

(g) (4 Punkte) Geben Sie die Fouriertransformierte $\hat{\psi}(f)$ von $\psi(t)$ an.

3. Aufgabe (25 Punkte)

- (a) (14 Punkte) Wir betrachten das zeitdiskrete LTI-System H_1 mit der Impulsantwort

$$h_1[n] = 4 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right) \sigma[n].$$

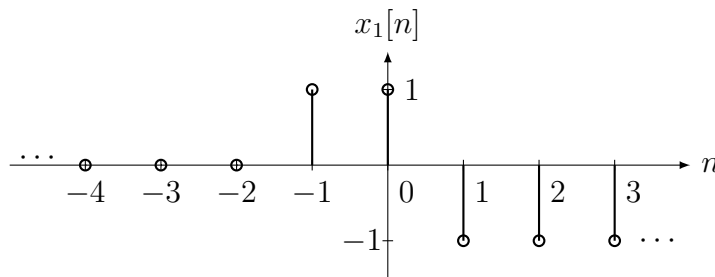
- i. Bestimmen Sie die Sprungantwort $a_1[n]$ von H_1 (d.h., das Ausgangssignal für das Eingangssignal $\sigma[n]$).

Hinweis: Für $q \neq 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

- ii. Bestimmen Sie das Ausgangssignal für das Eingangssignal,

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & n \in \{-1, 0\}, \\ -1, & n \geq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Leiten Sie das Resultat als Funktion der Sprungantwort a_1 her. Begründen Sie die Schritte in Ihrer Herleitung über die Eigenschaften von LTI-Systemen.

- iii. Geben sie eine allgemeine hinreichende Bedingung für BIBO-Stabilität eines zeitdiskreten LTI-Systems an. Zeigen Sie mithilfe dieser Bedingung, dass H_1 BIBO-stabil ist.

- (b) (11 Punkte) Wir betrachten nun das zeitdiskrete LTI-System H_2 mit Frequenzgang

$$\hat{h}_2(\theta) = \frac{7e^{4\pi i\theta}}{1 - \frac{1}{12}e^{-2\pi i\theta} - \frac{1}{12}e^{-4\pi i\theta}}.$$

- i. Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_2[n]$ von H_2 . Ist H_2 kausal? Begründen Sie Ihre Antwort.
- ii. Bestimmen Sie die zu H_2 gehörige Differenzengleichung.

4. **Aufgabe** (25 Punkte) Wir betrachten $N \times N$ Matrizen der Form

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{0,0} & \dots & h_{0,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N-1,0} & \dots & h_{N-1,N-1} \end{pmatrix}$$

mit den Elementen $h_{k,l} \in \mathbb{C}$, für $k, l \in \{0, \dots, N-1\}$. Des Weiteren seien

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{N-1} \end{pmatrix},$$

wobei $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$. Für eine $N \times N$ Matrix $\mathbf{H}$ sei die k -te Potenz definiert als

$$\mathbf{H}^k = \underbrace{\mathbf{H} \mathbf{H} \dots \mathbf{H}}_{k \text{ Mal}}$$

für $k \in \{1, \dots, N-1\}$ und

$$\mathbf{H}^0 = \mathbf{I}_N,$$

wobei $\mathbf{I}_N$ die $N \times N$ Identitätsmatrix ist. In der gesamten Aufgabe sind alle Indizes modulo N zu verstehen; konkret: Eine ganze Zahl k kann eindeutig als $k = Nk_1 + k_2$ geschrieben werden, wobei k_1 eine ganze Zahl ist und $k_2 \in \{0, \dots, N-1\}$. Wir identifizieren einen Index k immer mit k_2 , sodass sichergestellt ist, dass der Index die Menge $\{0, \dots, N-1\}$ nicht verlässt. Zum Beispiel ist für $N = 8$ und $k = 11$ auf Grund der modulo N Regel $k = 3$.

Für eine $N \times N$ Matrix $\mathbf{H}$ mit den Elementen $h_{k,l} \in \mathbb{C}$, für $k, l \in \{0, \dots, N-1\}$, sei die „Spreizfunktion“ $\eta_{\mathbf{H}}$ definiert als

$$\eta_{\mathbf{H}}(k, l) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} h_{m, m-k} \omega^{-ml}.$$

(a) (10 Punkte) Berechnen Sie für $\mathbf{x} = (x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{N-1})^T$ explizit folgende Vektoren:

- i. $\mathbf{T}^k \mathbf{x}$ für $k \in \{0, \dots, N-1\}$
- ii. $(\mathbf{T}^k)^T \mathbf{x}$ für $k \in \{0, \dots, N-1\}$
- iii. $\mathbf{M}^l \mathbf{x}$ für $l \in \{0, \dots, N-1\}$
- iv. $(\mathbf{T}^k \mathbf{M}^l - \mathbf{M}^l \mathbf{T}^k) \mathbf{x}$ für $k, l \in \{0, \dots, N-1\}$.

(b) (10 Punkte) Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Beziehungen für $p, k, l \in \{0, \dots, N-1\}$:

- i. $\eta_{\mathbf{H}^T}(k, l) = \omega^{-kl} \eta_{\mathbf{H}}(-k, l)$
- ii. $\eta_{\mathbf{T}^p \mathbf{H}}(k, l) = \omega^{-pl} \eta_{\mathbf{H}}(k-p, l)$
- iii. $\eta_{(\mathbf{T}^p)^T \mathbf{H}}(k, l) = \omega^{pl} \eta_{\mathbf{H}}(k+p, l)$
- iv. $\eta_{\mathbf{H} \mathbf{T}^p}(k, l) = \eta_{\mathbf{H}}(k-p, l)$.

(c) (5 Punkte) Berechnen Sie $\eta_{\mathbf{I}_N}(k, l)$ und $\eta_{\mathbf{T}^p}(k, l)$ für $p, k, l \in \{0, \dots, N-1\}$.