Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Lösung zur
Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
25. Januar 2017

1. **Aufgabe**

(a) Das Signal y ist periodisch mit Periode $2B$. Ferner gilt $y(f) = \widehat{x}(f)$, $f \in (-B, B)$, da das Signal x auf $[-B, B]$ band-begrenzt ist. Der n-te Fourierreihenkoeffizient von y ist damit gegeben durch

$$c_n(y) = \frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} y(f)e^{-\frac{\pi i n f}{B}}\mathrm{d}f = \frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} \widehat{x}(f)e^{-\frac{\pi i n f}{B}}\mathrm{d}f = \frac{1}{2B}x\Big(-\frac{n}{2B}\Big).$$

(b) Die Entwicklung des Signals y aus Punkt (a) in eine Fourierreihe ergibt

$$y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2B}x\Big(-\frac{n}{2B}\Big)\, e^{\frac{i\pi n f}{B}}, \quad f \in (-B, B).$$

Für $f = 0$ erhalten wir daraus

$$y(0) = \frac{1}{2B}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x\Big(-\frac{n}{2B}\Big) = \frac{1}{2B}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x\Big(\frac{n}{2B}\Big).$$

Da

$$y(0) = \widehat{x}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{d}t,$$

erhalten wir

$$T\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

was die gewünschte Formel ergibt.

(c) Der n-te Fourierreihenkoeffizient von z ist gegeben durch

$$\begin{aligned} c_n(z) &= \frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} z(f)e^{-\frac{2\pi i n f}{2B}}\mathrm{d}f = \frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} e^{-2\pi i\left(t+\frac{n}{2B}\right)f}\mathrm{d}f \\ &= \mathrm{sinc}\Big(2B\Big(t+\frac{n}{2B}\Big)\Big), \end{aligned}$$

wobei wir

$$\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1 & t = 0. \end{cases}$$

gesetzt haben.

(d) Wir haben

$$\begin{aligned}\frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} y(f)z^*(f)\mathrm{d}f &= \frac{1}{2B}\int_{-B}^{B}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(y)e^{\frac{2\pi i n f}{2B}}\right)\left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell^*(z)e^{-\frac{2\pi i \ell f}{2B}}\right)\mathrm{d}f \\ &= \frac{1}{2B}\int_{-B}^{B}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_n(y)c_\ell^*(z)e^{\frac{2\pi i(n-\ell)f}{2B}}\right)\mathrm{d}f \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_n(y)c_\ell^*(z)\left(\frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} e^{\frac{2\pi i(n-\ell)f}{2B}}\mathrm{d}f\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(y)c_n^*(z), \qquad (2)\end{aligned}$$

wobei wir

$$\frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} e^{\frac{2\pi i(n-\ell)f}{2B}}\mathrm{d}f = \begin{cases}1, & n=\ell\\ 0, & n\neq\ell\end{cases}$$

in (2) verwendet haben.

(e) Wir benutzen die Rücktransformationsformel für die Fouriertransformierte von x und erhalten

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_{-B}^{B}\widehat{x}(f)e^{2\pi i f t}\mathrm{d}f \\ &= \int_{-B}^{B} y(f)e^{2\pi i f t}\mathrm{d}f \qquad (3)\\ &= 2B\left(\frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} y(f)z^*(f)\mathrm{d}f\right) \\ &= 2B\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(y)c_n^*(z)\right) \qquad (4)\\ &= 2B\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2B}x\left(-\frac{n}{2B}\right)\operatorname{sinc}\left(2B\left(t+\frac{n}{2B}\right)\right)\right) \qquad (5)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right)\operatorname{sinc}\left(2B\left(t-\frac{n}{2B}\right)\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right), \qquad (6)\end{aligned}$$

wobei wir in (3) $\widehat{x}(f) = y(f)$, $f \in (-B, B)$, verwendet haben, (4) aus dem in Teilaufgabe (d) bewiesenen Resultat folgt, (5) dank der Ausdrücke für die Fourierreihenkoeffizienten von y und z hergeleitet werden konnte, und (6) aus $T = 1/(2B)$ folgt.

(f) Da die Fouriertransformierte von $u \mapsto x(\alpha+u)$, $u \in \mathbb{R}$, durch $f \mapsto e^{2\pi i\alpha f}\widehat{x}(f)$ gegeben ist und x auf $[-B, B]$ band-begrenzt ist, ist $u \mapsto x(\alpha+u)$ ebenfalls auf $[-B, B]$ band-begrenzt. Daher können wir das Resultat aus Teilaufgabe (b) und die in Teilaufgabe (e) bewiesene Interpolationsformel anwenden. Es ergibt sich damit durch Ersetzen von x durch $u \mapsto x(u+\alpha)$ in (1) und (6) direkt

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(u+\alpha)\mathrm{d}u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\alpha+nT), \tag{7}$$

und

$$x(u+\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\alpha+nT)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{u-nT}{T}\right), \quad u \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Durch Variablensubstitution $t = \alpha + u$ im Integral $\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(u+\alpha)\mathrm{d}u$ in (**??**) erhalten wir

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\alpha+nT),$$

und durch Substitution $t = u + \alpha$ in (**??**)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\alpha+nT)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-\alpha-nT}{T}\right).$$

2. **Aufgabe**

(a) Für zeitkontinuierliche Signale $x(t), y(t)$ und Koeffizienten $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ erhalten wir die Wavelet-Transformation des Signals $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ als

$$\begin{aligned} W_\psi(z)(t,a) &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x(\tau) + \beta y(\tau))\psi\Big(\frac{\tau - t}{a}\Big)\mathrm{d}\tau \\ &= \alpha\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\psi\Big(\frac{\tau - t}{a}\Big)\mathrm{d}\tau + \beta\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\psi\Big(\frac{\tau - t}{a}\Big)\mathrm{d}\tau \\ &= \alpha W_\psi(x)(t,a) + \beta W_\psi(y)(t,a), \end{aligned}$$

womit die Linearität bewiesen ist.

(b) Die Identität folgt aus

$$\begin{aligned} (T_{at_0}D_a x)(t) &= (D_a x)(t - at_0) = \frac{1}{a}x(a^{-1}(t - at_0)) \\ &= \frac{1}{a}x(a^{-1}t - t_0) = \frac{1}{a}(T_{t_0}x)(a^{-1}t) \\ &= (D_a T_{t_0} x)(t). \end{aligned}$$

(c) Aus der Identität

$$\begin{aligned} W_\psi(x)(t,a) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\frac{1}{a}\psi\Big(\frac{\tau - t}{a}\Big)\mathrm{d}\tau \\ &\overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{9}$$

folgt

$$h(t-\tau) \overset{!}{=} \frac{1}{a}\psi\Big(\frac{\tau - t}{a}\Big), \quad t, \tau \in \mathbb{R}.$$

Damit ist

$$h(t) := \frac{1}{a}\psi\Big(\frac{-t}{a}\Big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Um die Fouriertransformation von $z(t) = W_\psi(x)(t,a)$ zu berechnen, gehen wir von der Darstellung $z(t) = (x * h)(t)$ aus und benutzen die Eigenschaft, dass der Faltung von Signalen im Zeitbereich ein Produkt im Frequenzbereich entspricht, d.h.

$$\widehat{z}(f) = \widehat{x}(f)\widehat{h}(f). \tag{10}$$

Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} \widehat{h}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-2\pi i f t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a}\psi\Big(\frac{-t}{a}\Big)e^{-2\pi i f t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)e^{2\pi i a f \tau}\mathrm{d}t = \widehat{\psi}(-af), \end{aligned}$$

wobei wir die Variablensubstitution $\tau = -\frac{t}{a}$, $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{a}$, gemacht und die Annahme $a > 0$ verwendet haben. Mit Hilfe von (8) erhalten wir nun

$$\widehat{z}(f) = \widehat{x}(f)\widehat{\psi}(-af).$$

(d) Das Signal $\psi(t)$ erfüllt die Wavelet-Eigenschaft (3) nicht, denn es gilt

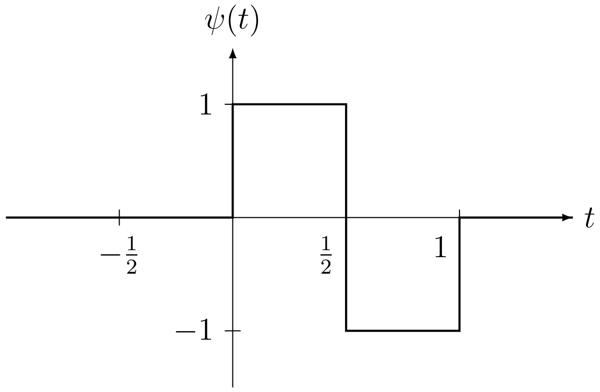
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)e^{-2\pi i\cdot 0\cdot t}\mathrm{d}t = \widehat{\psi}(0) = \pi \neq 0.$$

(e) Durch partielle Integration erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} g'(t)\cdot 1\mathrm{d}t = \underbrace{\Big[g(t)\cdot 1\Big]_{t=-\infty}^{t=\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cdot 0\,\mathrm{d}t = 0,$$

wobei wir verwendet haben, dass $g(t)$ kompakten Träger hat und somit $\lim\limits_{|t|\to\infty} g(t) = 0$ gilt. Das Signal $\psi(t)$ erfüllt daher die Wavelet-Eigenschaft (3).

(f) Es ergibt sich folgendes Schaubild:



(g) Wir können das Haar Wavelet $\psi(t)$ in die Differenz von zwei verschobenen Rechteckssignalen zerlegen:

$$\psi(t) = (T_{\frac{1}{4}}r)(t) - (T_{\frac{3}{4}}r)(t),$$

wobei

$$r(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant \frac{1}{4} \\ 0, & |t| > \frac{1}{4}, \end{cases}$$

und $(T_{t_0}x)(t) := x(t-t_0)$ der Translationsoperator ist. Für die Fouriertransformierte des Rechteckssignals $r(t)$ erhalten wir mit Hilfe der Formelsammlung

$$\widehat{r}(f) = \frac{\sin(\pi f/2)}{\pi f}.$$

Insgesamt haben wir also

$$\widehat{\psi}(f) = e^{-\pi i f/2}\,\widehat{r}(f) - e^{-3\pi i f/2}\,\widehat{r}(f) = e^{-\pi i f/2}\,\frac{\sin(\pi f/2)}{\pi f} - e^{-3\pi i f/2}\,\frac{\sin(\pi f/2)}{\pi f},$$

wobei wir die Translationseigenschaft der Fouriertransformation verwendet haben (s. Formelsammlung).

3. **Aufgabe**

(a) i. Wir bestimmen die Sprungantwort a_1 von H_1 gemäss

$$\begin{aligned}
a_1[n] &= (h_1 * \sigma)[n] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]\sigma[n-k] && (11)\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} h_1[k]\right)\sigma[n] && (12)\\
&= 4\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)\sigma[n] && (13)\\
&= 4\left(2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - \frac{3}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)\right)\sigma[n] && (14)\\
&= \left(5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)\sigma[n]\\
&= \left(5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right)\sigma[n],
\end{aligned}$$

wobei wir für den Schritt von (11) zu (12) die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad \text{für } q \neq 1,$$

verwendet haben, und der Faktor $\sigma[n]$ in (10) benötigt wird, da die Summe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]\sigma[n-k]$ in (9) den Wert 0 annimmt für $n < 0$.

ii. Das Signal $x_1[n]$ lässt sich wie folgt darstellen: $x_1[n] = \sigma[n+1] - 2\sigma[n-1]$. Wir erhalten somit das zugehörige Ausgangssignal als

$$\begin{aligned}
y_1[n] &= (h_1 * x_1)[n] \\
&= (h_1 * (\sigma[\cdot+1] - 2\sigma[\cdot-1]))[n] && (15)\\
&= (h_1 * \sigma[\cdot+1])[n] - 2(h_1 * \sigma[\cdot-1])[n] && (16)\\
&= (h_1 * \sigma)[n+1] - 2(h_1 * \sigma)[n-1] && (17)\\
&= a_1[n+1] - 2a_1[n-1],
\end{aligned}$$

wobei wir für den Schritt von (13) zu (14) die Linearität von H_1 verwendet haben und für den Schritt von (14) zu (15) die Zeitinvarianz von H_1.

iii. Eine hinreichende Bedingung für BIBO-Stabilität eines zeitdiskreten LTI-Systems mit Impulsantwort $h[n]$ ist $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$. Für $h_1[n]$ erhalten wir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_1[n]| = 4\sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right|$$
$$\leq 4\sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$$
$$= 4\left(2 + \frac{3}{2}\right) = 14 < \infty,$$

wobei wir die Formel $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, für $q < 1$, verwendet haben. Wir haben somit gezeigt, dass H_1 BIBO-stabil ist.

(b) i. Durch Faktorisieren des Nenners von $\hat{h}_2(\theta)$ erhalten wir

$$\hat{h}_2(\theta) = \frac{7e^{4\pi i\theta}}{1 - \frac{1}{12}e^{-2\pi i\theta} - \frac{1}{12}e^{-4\pi i\theta}}$$
$$= \frac{7}{(1 + \frac{1}{4}e^{-2\pi i\theta})(1 - \frac{1}{3}e^{-2\pi i\theta})} e^{4\pi i\theta}.$$

Wir vereinfachen diesen Ausdruck mittels Partialbruchzerlegung gemäss

$$e^{-4\pi i\theta}\hat{h}_2(\theta) = \frac{A}{1 + \frac{1}{4}e^{-2\pi i\theta}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{3}e^{-2\pi i\theta}}$$
$$= \frac{A(1 - \frac{1}{3}e^{-2\pi i\theta}) + B(1 + \frac{1}{4}e^{-2\pi i\theta})}{(1 + \frac{1}{4}e^{-2\pi i\theta})(1 - \frac{1}{3}e^{-2\pi i\theta})}.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$A + B = 7, \qquad \text{und} \qquad -\frac{A}{3} + \frac{B}{4} = 0$$
$$\implies A = \frac{3}{4}B$$
$$\implies \frac{3}{4}B + B = 7$$
$$\implies B = 4, A = 3$$

und damit

$$\hat{h}_2(\theta) = \left(\frac{3}{1 - (-\frac{1}{4})e^{-2\pi i\theta}} + \frac{4}{1 - \frac{1}{3}e^{-2\pi i\theta}} \right) e^{4\pi i\theta}.$$

Aus der Fouriertransformationstabelle entnehmen wir, dass der Faktor $e^{4\pi i\theta}$ im Zeitbereich eine Verschiebung gemäss $x[n+2]$ bewirkt. Somit erhalten wir

$$h_2[n] = 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+2} \sigma[n+2] + 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} \sigma[n+2].$$

Da $h_2[-2] = 7 \neq 0$ ist das System nicht kausal.

ii. Die Eingangs-Ausgangsbeziehung von H_2 lautet im Frequenzbereich

$$\hat{y}_2(\theta) = \hat{h}_2(\theta)\hat{x}_2(\theta),$$

und damit

$$\left(1 - \frac{1}{12}e^{-2\pi i\theta} - \frac{1}{12}e^{-4\pi i\theta}\right)\hat{y}_2(\theta) = 7e^{4\pi i\theta}\hat{x}_2(\theta).$$

Dieser Ausdruck entspricht im Zeitbereich der Differenzengleichung

$$y_2[n] - \frac{1}{12}y_2[n-1] - \frac{1}{12}y_2[n-2] = 7x_2[n+2]$$

und nach Umformung folgt

$$y_2[n] = 7x_2[n+2] + \frac{1}{12}y_2[n-1] + \frac{1}{12}y_2[n-2].$$

4. **Aufgabe**

(a) i. Aus

$$\mathbf{T}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_0 \\ \vdots \\ x_{N-2} \end{pmatrix}$$

folgt für $k \in \{0, \dots, N-1\}$ durch k-fache Anwendung der Matrix $\mathbf{T}$ auf $\mathbf{x}$ (0-fache Anwendung entspricht der Multiplikation mit $\mathbf{T}^0 = \mathbf{I}_N$)

$$\mathbf{T}^k\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{N-k} \\ x_{N-k+1} \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-k-1} \end{pmatrix}.$$

ii. Wir haben $(\mathbf{T}^0)^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}_N^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}_N = (\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^0$. Des Weiteren gilt für alle $k \in \{1, \dots, N-1\}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}^k)^{\mathrm{T}} &= (\underbrace{\mathbf{T} \dots \mathbf{T}}_{k \text{ Mal}})^{\mathrm{T}} \\ &= \underbrace{\mathbf{T}^{\mathrm{T}} \dots \mathbf{T}^{\mathrm{T}}}_{k \text{ Mal}} \\ &= (\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^k. \end{aligned}$$

Folglich gilt $(\mathbf{T}^k)^{\mathrm{T}} = (\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^k$ für alle $k \in \{0, \dots, N-1\}$. Aus

$$\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_0 \end{pmatrix}$$

folgt durch k-fache Anwendung der Matrix $\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$ auf $\mathbf{x}$ (0-fache Anwendung entspricht der Multiplikation mit $(\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^0 = \mathbf{I}_N$)

$$(\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^k \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_0 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix}.$$

iii. Aus

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{N-1} \end{pmatrix}$$

folgt unmittelbar

$$\mathbf{M}^l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega^l & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{l(N-1)} \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist

$$\mathbf{M}^l \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \omega^l x_1 \\ \vdots \\ \omega^{l(N-1)} x_{N-1} \end{pmatrix}.$$

iv. Wir berechnen zunächst den Ausdruck

$$\mathbf{T}^k \mathbf{M}^l \mathbf{x} = \mathbf{T}^k \begin{pmatrix} x_0 \\ \omega^l x_1 \\ \vdots \\ \omega^{l(N-1)} x_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} \omega^{l(N-k)} x_{N-k} \\ \omega^{l(N-k+1)} x_{N-k+1} \\ \vdots \\ \omega^{l(N-1)} x_{N-1} \\ x_0 \\ \omega^l x_1 \\ \vdots \\ \omega^{l(N-k-1)} x_{N-k-1} \end{pmatrix}
$$

$$
= \omega^{l(N-k)} \begin{pmatrix} x_{N-k} \\ \omega^{l} x_{N-k+1} \\ \vdots \\ \omega^{l(k-1)} x_{N-1} \\ \omega^{lk} x_0 \\ \omega^{l(k+1)} x_1 \\ \vdots \\ \omega^{l(N-1)} x_{N-k-1} \end{pmatrix} .
$$

Nun berechnen wir den Ausdruck

$$
\mathbf{M}^l \mathbf{T}^k \mathbf{x} = \mathbf{M}^l \begin{pmatrix} x_{N-k} \\ x_{N-k+1} \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-k-1} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} x_{N-k} \\ \omega^{l} x_{N-k+1} \\ \vdots \\ \omega^{l(k-1)} x_{N-1} \\ \omega^{lk} x_0 \\ \omega^{l(k+1)} x_1 \\ \vdots \\ \omega^{l(N-1)} x_{N-k-1} \end{pmatrix} .
$$

Wir haben daher

$$(\mathbf{T}^k\mathbf{M}^l - \mathbf{M}^l\mathbf{T}^k)\mathbf{x} = (\omega^{l(N-k)} - 1)\begin{pmatrix} x_{N-k} \\ \omega^l x_{N-k+1} \\ \vdots \\ \omega^{l(k-1)} x_{N-1} \\ \omega^{lk} x_0 \\ \omega^{l(k+1)} x_1 \\ \vdots \\ \omega^{l(N-1)} x_{N-k-1} \end{pmatrix}.$$

(b) i. Wir setzen $\mathbf{G} = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}$. Aus

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{0,0} & \cdots & g_{0,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N-1,0} & \cdots & g_{N-1,N-1} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{H}^{\mathrm{T}}$$

$$= \begin{pmatrix} h_{0,0} & \cdots & h_{N-1,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{0,N-1} & \cdots & h_{N-1,N-1} \end{pmatrix}$$

erhalten wir $g_{k,l} = h_{l,k}$ für $k, l \in \{0, \ldots, N-1\}$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{H}^{\mathrm{T}}}(k,l) &= \eta_{\mathbf{G}}(k,l) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} g_{m,m-k}\,\omega^{-ml} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} h_{m-k,m}\,\omega^{-ml} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} h_{m,m+k}\,\omega^{-(m+k)l} \\ &= \omega^{-kl}\eta_{\mathbf{H}}(-k,l). \end{aligned}$$

ii. Wir schreiben zunächst $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_0 \ldots \mathbf{h}_{N-1})$ wobei $\mathbf{h}_k$, $k = 0, \ldots, N-1$, die Spalten von $\mathbf{H}$ bezeichnet, und setzen $\mathbf{G} = \mathbf{T}^p\mathbf{H}$. Aus $\mathbf{T}^p\mathbf{H} = (\mathbf{T}^p\mathbf{h}_0 \ldots \mathbf{T}^p\mathbf{h}_{N-1})$ erhalten wir die Darstellung

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{0,0} & \cdots & g_{0,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N-1,0} & \cdots & g_{N-1,N-1} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{T}^p\mathbf{H}$$

$$= \begin{pmatrix} h_{N-p,0} & \cdots & h_{N-p,N-1} \\ h_{N-p+1,0} & \cdots & h_{N-p+1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N-1,0} & \cdots & h_{N-1,N-1} \\ h_{0,0} & \cdots & h_{0,N-1} \\ h_{1,0} & \cdots & h_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N-p-1,0} & \cdots & h_{N-p-1,N-1} \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $g_{k,l} = h_{k-p,l}$ für $k, l, p \in \{0, \ldots, N-1\}$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{T}^p\mathbf{H}}(k,l) &= \eta_{\mathbf{G}}(k,l) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} g_{m,m-k}\,\omega^{-ml} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} h_{m-p,m-k}\,\omega^{-ml} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} h_{m,m-k+p}\,\omega^{-(m+p)l} \\ &= \omega^{-pl}\eta_{\mathbf{H}}(k-p,l). \end{aligned}$$

iii. Wir schreiben wieder $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_0 \ldots \mathbf{h}_{N-1})$ und setzen $\mathbf{G} = (\mathbf{T}^p)^{\mathrm{T}}\mathbf{H} = (\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^p\mathbf{H}$. Aus $(\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^p\mathbf{H} = ((\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^p\mathbf{h}_0 \ldots (\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^p\mathbf{h}_{N-1})$ erhalten wir die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \begin{pmatrix} g_{0,0} & \cdots & g_{0,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N-1,0} & \cdots & g_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^p\mathbf{H} \\ &= \begin{pmatrix} h_{p,0} & \cdots & h_{p,N-1} \\ h_{p+1,0} & \cdots & h_{p+1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N-1,0} & \cdots & h_{N-1,N-1} \\ h_{0,0} & \cdots & h_{0,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{p-1,0} & \cdots & h_{p-1,N-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Folglich ist $g_{k,l} = h_{k+p,l}$ für $k, l, p \in \{0, \ldots, N-1\}$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \eta_{(\mathbf{T}^p)^{\mathrm{T}}\mathbf{H}}(k,l) &= \eta_{\mathbf{G}}(k,l) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} g_{m,m-k}\,\omega^{-ml} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} h_{m+p,m-k}\, \omega^{-ml} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} h_{m,m-k-p}\, \omega^{-(m-p)l} \\
&= \omega^{pl} \eta_{\mathbf{H}}(k+p, l).
\end{aligned}
$$

iv.

$$
\begin{aligned}
\eta_{\mathbf{H}\mathbf{T}^p}(k,l) &= \omega^{-kl} \eta_{(\mathbf{T}^p)^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}}(-k,l) \\
&= \omega^{(p-k)l} \eta_{\mathbf{H}^{\mathrm{T}}}(p-k,l) \\
&= \eta_{\mathbf{H}}(k-p,l),
\end{aligned}
$$

wobei wir im ersten und im letzten Schritt die Beziehung 4(b)i. und im zweiten Schritt die Beziehung 4(b)iii. verwendet haben.

(c) Für $\mathbf{H} = \mathbf{I}_N$ gilt $h_{k,l} = \delta_{k,l}$ für $k, l \in \{0, \ldots, N-1\}$, wobei

$$
\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & \text{für } k = l \\ 0, & \text{für } k \neq l. \end{cases} \tag{18}
$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\eta_{\mathbf{I}_N}(k,l) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \delta_{m,m-k}\, \omega^{-ml} \\
&= \delta_{k,0}\, \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \omega^{-ml} \\
&= \delta_{k,0}\, \delta_{l,0}.
\end{aligned}
$$

Aus $\mathbf{T}^p = \mathbf{I}_N \mathbf{T}^p$ ergibt sich mit Hilfe von Eigenschaft 4(b)iv.

$$
\begin{aligned}
\eta_{\mathbf{T}^p}(k,l) &= \eta_{\mathbf{I}_N \mathbf{T}^p}(k,l) \\
&= \eta_{\mathbf{I}_N}(k-p,l) \\
&= \delta_{k-p,0}\, \delta_{l,0}.
\end{aligned}
$$