Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
28. August 2017

Bitte beachten Sie:

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung erlaubt sind die Transformationstabellen, die Sie von uns erhalten. Die Benutzung von Rechnern/Smartphones/Tablets jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen Sie darauf hin, dass Studierende bei unehrlichem Handeln während der Prüfung den Strafnormen der Disziplinarordnung RSETHZ 361.1 der ETHZ unterstehen.

Vor der Klausur:

1. Dieses Angabenheft hat 6 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen ausschliesslich auf die bereitgestellten leeren Blätter. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie weitere Blätter.

Nach der Klausur:

5. Nummerieren Sie die Lösungsblätter und beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen. Tragen Sie die Anzahl der Lösungsblätter (exklusive der Aufgabenblätter), die Sie abgeben möchten, auf dieser Seite unten ein und unterschreiben Sie. Alle Aufgabenblätter müssen abgegeben werden.

Nachname: .... Vorname: ....

Legi-Nr.: ....

Anzahl abgegebener Lösungsblätter: ....

Unterschrift: ....

1. **Aufgabe** (25 Punkte)

Sei $B > 0$ fest. In dieser Aufgabe betrachten wir ein auf $[-B, B]$ band-begrenztes Signal $x \in L^2(\mathbb{R})$, d.h. $\widehat{x}(f) = 0$ für alle $f \in \mathbb{R}$ mit $|f| > B$. Das Signal x wird zu den Zeitpunkten nT, $n \in \mathbb{Z}$, abgetastet.

(a) (4 Punkte) Kann das Signal x aus seinen Abtastwerten $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, mit $T = 1/(4B)$, rekonstruiert werden? Falls nein, erklären Sie warum nicht; falls ja, geben Sie eine Rekonstruktionsformel an.

(b) (5 Punkte) Wir setzen nun $T = 1/(4B)$ und nehmen an, dass $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(nT)| < \infty$. Zeigen Sie, dass man dank der durch Überabtastung induzierten Redundanz in der Folge $x(nT)$ die Abtastwerte zu ungeraden Zeitpunkten aus denen zu geraden Zeitpunkten gemäss

$$x((2n+1)T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(2kT) \frac{(-1)^{n-k}}{\pi(n-k+1/2)},$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$, erhalten kann.

(c) (11 Punkte) Sei $T \in \left(0, \frac{1}{2B}\right)$ beliebig. Wir nehmen an, dass $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(nT)| < \infty$. Das Ziel dieser Teilaufgabe ist es zu zeigen, dass x unabhängig vom Wert von $T \in \left(0, \frac{1}{2B}\right)$ gemäss

$$x(t) = 2BT \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc}(2B(t - nT)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

rekonstruiert werden kann, wobei

$$\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

i. Finden Sie einen Ausdruck für die zeitdiskrete Fouriertransformierte $\hat{x}_d$ des zeitdiskreten Signals $\{x(nT)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, als Funktion der Fouriertransformierten $\hat{x}$ des zeitkontinuierlichen Signals x.

ii. Erklären Sie wie $\hat{x}(f)$, $f \in [-B, B]$, aus der Fouriertransformierten $\hat{x}_d$ des zeitdiskreten Signals $\{x(nT)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, zurückgewonnen werden kann.

iii. Verwenden Sie nun das Ergebnis aus ii. um (1) zu zeigen.

(d) (5 Punkte) Sei $T \in \left(0, \frac{1}{2B}\right)$ beliebig. Wir nehmen immer noch an, dass $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(nT)| < \infty$. Ist es möglich, eine Interpolationsformel alternativ zu (1) abzuleiten, die eine andere Kernfunktion verwendet, d.h. gibt es ein $h \neq 2BT\,\mathrm{sinc}(2B\cdot)$, so dass

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t - nT), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Falls nein, begründen Sie warum. Falls ja, begründen Sie warum und charakterisieren Sie mögliche Kerne h.

2. **Aufgabe** (25 Punkte) Ein zeitkontinuierliches System H mit Eingangssignal $x(t)$ und Ausgangssignal $y(t)$ sei durch folgende Eingangs-Ausgangsbeziehung definiert:

$$y(t) := H(x)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(t,\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Beachten Sie, dass die Funktion $h(t,\tau)$ von zwei Variablen, t und τ, abhängt.

(a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Abbildung $x(t) \mapsto H(x)(t)$ für gegebenes $h(t,\tau)$ linear ist.

(b) (4 Punkte) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an $h(t,\tau)$ für Zeitinvarianz von H an. Begründen Sie Ihre Antwort im Detail.

(c) (4 Punkte) In dieser Teilaufgabe nehmen wir an, dass $x(t) = \sigma(t)\sigma(-t+\pi^2)$, $t \in \mathbb{R}$, und $h(t,\tau) = 1$, für alle $t,\tau \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie die zugehörige Systemantwort $y(t)$ in (2) für $t \in [-3,3]$. *Achten Sie auf die Beschriftung der Achsen.*

(d) (4 Punkte) Finden Sie eine hinreichende Bedingung an $h(t,\tau)$, sodass das System H BIBO-stabil ist.

(e) (6 Punkte) In dieser Teilaufgabe nehmen wir an, dass die Funktion $h(t,\tau)$ als Produkt der Funktionen $h_1(t)$ und $h_2(\tau)$ geschrieben werden kann, d.h.

$$h(t,\tau) = h_1(t) \cdot h_2(\tau), \quad \forall\, t,\, \tau \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Fouriertransformation der zugehörigen Systemantwort $y(t)$ in (2). Geben Sie ferner eine konkrete Wahl von $h_1(t)$ und $h_2(\tau)$ an, sodass

$$y(t) = H(x)(t) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

für alle $x(t)$.

(f) (3 Punkte) Charakterisiert die Systemantwort $y(t)$ auf das Eingangssignal $x(t) = \delta(t)$ die Funktion $h(t,\tau)$ vollständig, d.h. ist es möglich $h(t,\tau)$, für alle $t,\tau \in \mathbb{R}$, aus $y(t) = H(\delta)(t)$ zu ermitteln?

3. **Aufgabe** (25 Punkte)

(a) (13 Punkte) Wir betrachten das zeitdiskrete LTI-System H_1 mit Frequenzgang

$$\hat{h}_1(\theta) = \frac{24}{8 - 2e^{-2\pi i\theta} - e^{-4\pi i\theta}}.$$

i. (7 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_1[n]$ von H_1.

ii. (3 Punkte) Bestimmen Sie die zu H_1 gehörige Differenzengleichung.

iii. (3 Punkte) Zeichnen Sie das zu H_1 gehörige Blockschaltbild.

(b) (12 Punkte) Wir betrachten nun das zeitdiskrete LTI-System H_2 mit der Impulsantwort

$$h_2[n] = 2^{\alpha n+1}\sigma[n] + 5\beta^{-n}\sigma[n+1],$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

i. (2 Punkte) Ist H_2 kausal? Begründen Sie Ihre Antwort.

ii. (5 Punkte) Geben sie eine hinreichende Bedingung für BIBO-Stabilität eines allgemeinen zeitdiskreten LTI-Systems an. Verwenden Sie diese Bedingung nun um möglichst grosse Wertebereiche für α und β zu ermitteln, so dass H_2 BIBO-stabil ist.

iii. (5 Punkte) Es seien α und β unbekannt. Wir beobachten die folgenden zwei Werte der Sprungantwort $a_2[n]$ von H_2:

$$a_2[-1] = -20 \qquad \text{und} \qquad a_2[1] = -\frac{55}{4}.$$

Bestimmen Sie daraus α und β. Ist H_2 fuer die ermittelten Werte von α und β BIBO-stabil?

4. **Aufgabe** (25 Punkte) Wir betrachten die zeitdiskreten periodischen Signale

$$x[n] = 2\sin(\pi n/3)\cos(\pi n)$$
$$y[n] = (-1/3)\cos(2\pi n/3).$$

(a) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Periodendauer M von $x[n]$ und die Periodendauer N von $y[n]$, das heisst das minimale $M \in \mathbb{N}$ so dass $x[n] = x[n+M]$, für alle $n \in \mathbb{Z}$, gilt und das minimale $N \in \mathbb{N}$ so dass $y[n] = y[n+N]$, für alle $n \in \mathbb{Z}$, gilt. Berechnen Sie des Weiteren explizit die Werte $x[n]$ für $n = 0, \ldots, M-1$. (Hinweis: $\cos(\pi/3) = -\cos(2\pi/3) = 1/2$)

(b) (6 Punkte) Berechnen Sie die diskrete Fouriertransformierte (DFT) von $x[n]$ über eine Grundperiode.

(c) (7 Punkte) Berechnen Sie das zeitdiskrete periodische Signal

$$z[n] = \sum_{m=0}^{K-1} x[m]y[n-m], \tag{3}$$

wobei K das kleinste gemeinsame Vielfache der Periodendauern von $x[n]$ und $y[n]$ ist.

(d) (6 Punkte) In dieser Teilaufgabe soll illustriert werden, dass Zero-Padding eines Signals auf eine geeignete Länge die DFT erheblich verändert. Berechnen Sie hierzu die 5-Punkt-DFT des Signals

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und die 6-Punkt-DFT des Signals $\mathbf{x}_2$, das man durch Zero-Padding von $\mathbf{x}_1$ auf die Länge 6 erhält, das heisst

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie die Ergebnisse.