Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Lösung zur
Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
28. August 2017

1. **Aufgabe**

(a) Gemäss Abtasttheorem ist es möglich das Signal x aus seinen Abtastwerten $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, zu rekonstruieren solange $T \leq 1/(2B)$. Hier haben wir $T = 1/(4B) < 1/(2B)$, was impliziert, dass Rekonstruktion möglich ist. Da das Signal überabgetastet ist, gibt es unendlich viele Möglichkeiten es aus seinen Abtastwerten zu rekonstruieren. Eine Möglichkeit besteht darin x aus den geraden Abtastwerten $x(2nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, zu rekonstruieren gemäss der Interpolationsformel

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - 2nT}{2T}\right), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

wobei

$$\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

(b) Aus (1) erhalten wir, für alle $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} x((2n+1)T) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(2kT) \operatorname{sinc}\left(n - k + \frac{1}{2}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(2kT) \frac{\sin(\pi(n-k+1/2))}{\pi(n-k+1/2)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(2kT) \frac{(-1)^{n-k}}{\pi(n-k+1/2)}, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei (2) aus $\sin(\pi(n-k+1/2)) = \cos(\pi(n-k))\sin(\pi/2) = (-1)^{n-k}$ folgt.

(c) i. Die zeitdiskrete Fouriertransformierte $\hat{x}_d$ des zeitdiskreten Signals $\{x(nT)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \hat{x}_d(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-2\pi i n\theta} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(\frac{\theta + n}{T}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

wobei (3) aus der Formelsammlung folgt.

ii. $\hat{x}_d$ ist eine 1-periodische Version von $\theta \mapsto \hat{x}(\theta/T)$. Da $1/T > 2B$ gilt, gibt es keine Überlappung zwischen den verschobenen Kopien von $\theta \mapsto \hat{x}(\theta/T)$. Daraus folgt, dass $\hat{x}$ gemäss

$$\hat{x}(f) = T\hat{x}_d(fT)\hat{h}_{\mathrm{TP}}(fT), \quad f \in [-B, B],$$

aus $\hat{x}_d$ zurückgewonnen werden kann, wobei

$$\hat{h}_{\mathrm{TP}}(\theta) = \begin{cases} 1, & |\theta| \le BT \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4}$$

Hierbei wurde die Beziehung $\theta = Tf$ verwendet.

iii. Wir haben

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) e^{2\pi i f t} \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} T\hat{x}_d(fT)\hat{h}_{\mathrm{TP}}(fT) e^{2\pi i f t} \mathrm{d}f \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} T \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-2\pi i n f T} \right) \hat{h}_{\mathrm{TP}}(fT) e^{2\pi i f t} \mathrm{d}f \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-\infty}^{\infty} T\hat{h}_{\mathrm{TP}}(fT) e^{2\pi i f (t-nT)} \mathrm{d}f \qquad (5) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_{\mathrm{TP}}(u) e^{2\pi i u (t-nT)/T} \mathrm{d}u \qquad (6) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h_{\mathrm{TP}}\left(\frac{t-nT}{T} \right) \\
&= 2BT \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc}(2B(t-nT)), \qquad (7)
\end{aligned}$$

wobei wir in (6) $u = fT$ substituiert haben und (7) aus

$$h_{\mathrm{TP}}(u) = 2BT \operatorname{sinc}(2BTu), \quad u \in \mathbb{R},$$

folgt. In (5) dürfen wir die Reihenfolge der Summation und des Integrals vertauschen, weil per Annahme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(nT)| < \infty$ gilt.

(d) Da das Signal, dank $T \in \left(0, \frac{1}{2B}\right)$, überabgetastet ist, ist jede Kernfunktion h zulässig, die die Bedingungen $\hat{h}(\theta) = 1$, $|\theta| \le BT$, und $\hat{h}(\theta) = 0$, für $|\theta| > 1/2$, erfüllt. Für $BT \le |\theta| \le 1/2$ ist $\hat{h}(\theta)$ beliebig. Daher gibt es, dank $BT < 1/2$, unendlich viele zulässige Kernfunktionen. Beachten Sie auch hier wieder, dass $\theta = Tf$.

2. **Aufgabe**

(a) Für zeitkontinuierliche Signale $x_1(t), x_2(t)$ und Koeffizienten $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} H(\alpha x_1 + \beta x_2)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x_1(t-\tau) + \beta x_2(t-\tau))h(t,\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau)h(t,\tau)\mathrm{d}\tau + \beta \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau)h(t,\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \alpha H(x_1)(t) + \beta H(x_2)(t), \end{aligned}$$

womit die Linearität bewiesen ist.

(b) Für festes $t_0 \in \mathbb{R}$ definieren wir den Translationsoperator

$$(T_{t_0}x)(t) := x(t-t_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

der eine Verschiebung um t_0 bewirkt. Aus der Vorlesung wissen wir, dass das System H zeitinvariant ist, wenn für alle t_0 und alle Eingangssignale $x(t)$ gilt

$$H(T_{t_0}x)(t) = H(x)(t-t_0), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Für die linke Seite in (8) ergibt sich

$$H(T_{t_0}x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (T_{t_0}x)(t-\tau)h(t,\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x\big((t-t_0)-\tau\big)h(t,\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{9}$$

und für die rechte Seite in (8) erhalten wir

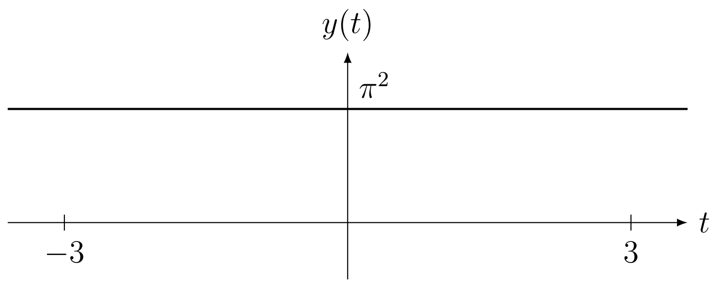
$$H(x)(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x\big((t-t_0)-\tau\big)h(t-t_0,\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{10}$$

Da die Gleichheit von (9) und (10) für alle Eingangssignale $x(t)$ gelten muss folgt, dass das System H dann und nur dann zeitinvariant ist, wenn $h(t,\tau) = h(t-t_0,\tau)$, für alle $t, \tau, t_0 \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet, dass $h(t,\tau)$ nicht von t, sondern nur von τ abhängen darf (d.h. $h(t,\tau)$ ist konstant in Bezug auf t) und sich somit als Funktion nur von τ darstellen lässt, d.h. $h(t,\tau) = g(\tau)$.

(c) Wir haben

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(t,\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-\tau)\sigma(\tau - t + \pi^2)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{t-\pi^2}^{t} 1\mathrm{d}\tau = (t-(t-\pi^2)) = \pi^2, \end{aligned}$$

womit sich folgendes Schaubild ergibt:



(d) Eine hinreichende Bedingung für BIBO-Stabilität des Systems H ist gegeben durch:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t,\tau)| \mathrm{d}\tau < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Diese Aussage lässt sich wie folgt zeigen: Es sei $x(t)$ ein beschränktes Eingangssignal, d.h. $|x(t)| \leq B_x < \infty$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |y(t)| = |H(x)(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(t,\tau) \mathrm{d}\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|x(t-\tau)|}_{\leq B_x} |h(t,\tau)| \mathrm{d}\tau \leq B_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(t,\tau)| \mathrm{d}\tau < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt (11) verwendet haben. Somit ergibt sich für jedes beschränkte Eingangssignal $x(t)$ ein beschränktes Ausgangssignal $y(t) = H(x)(t)$.

(e) Für die Funktion

$$h(t,\tau) = h_1(t) \cdot h_2(\tau), \quad \forall\, t,\, \tau \in \mathbb{R},$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} y(t) = H(x)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(t,\tau) \mathrm{d}\tau = h_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h_2(\tau) \mathrm{d}\tau \\ &= h_1(t)(x * h_2)(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Um die Fouriertransformation von $y(t)$ zu berechnen, benutzen wir, dass (i) die Faltung zweier Zeitbereichssignale auf ein Produkt im Frequenzbereich abgebildet wird und (ii) das Produkt zweier Zeitbereichssignale auf eine Faltung im Frequenzbereich abgebildet wird. Damit erhalten wir

$$\widehat{y}(f) = (\widehat{h_1} * \widehat{z})(f),$$

wobei $\widehat{z}(f) = \widehat{x}(f) \cdot \widehat{h_2}(f)$. Mit Hilfe der Identität (12) ist es schliesslich ersichtlich, dass für $h_1(t) = 1$ und $h_2(\tau) = \delta(\tau)$, für alle Eingangssignale $x(t)$ die folgende Gleichung gilt:

$$y(t) = h_1(t)(x * h_2)(t) = x(t),$$

wobei wir verwendet haben, dass die Deltafunktion das Einselement der Faltung ist.

(f) Für $x(t) = \delta(t)$ ergibt sich

$$H(x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) h(t,\tau) \mathrm{d}\tau = h(t,t),$$

wobei wir die Siebeigenschaft der Deltafunktion benutzt haben. Die Systemantwort $y(t) = h(t,t)$ charakterisiert das System H somit nicht vollständig. Für eine vollständige Charakterisierung müsste $h(t,\tau)$ für alle $t, \tau \in \mathbb{R}$ bekannt sein, insbesondere also auch für $t \neq \tau$.

3. **Aufgabe**

(a) i. Durch Faktorisieren des Nenners von $\hat{h}_1(\theta)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{h}_1(\theta) &= \frac{24}{8 - 2e^{-2\pi i\theta} - e^{-4\pi i\theta}} \\ &= \frac{3}{1 - \frac{1}{4}e^{-2\pi i\theta} - \frac{1}{8}e^{-4\pi i\theta}} \\ &= \frac{3}{(1 - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta})(1 + \frac{1}{4}e^{-2\pi i\theta})}.\end{aligned}$$

Wir führen nun Partialbruchzerlegung gemäss

$$\begin{aligned}\hat{h}_1(\theta) &= \frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta}} + \frac{B}{1 + \frac{1}{4}e^{-2\pi i\theta}} \\ &= \frac{A(1 + \frac{1}{4}e^{-2\pi i\theta}) + B(1 - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta})}{(1 - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta})(1 + \frac{1}{4}e^{-2\pi i\theta})}\end{aligned}$$

durch. Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned}& A + B = 3, \qquad \text{und} \qquad \frac{A}{4} - \frac{B}{2} = 0 \\ & \implies A = 2B \\ & \implies 2B + B = 3 \\ & \implies B = 1, A = 2\end{aligned}$$

und damit

$$\hat{h}_1(\theta) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}e^{-2\pi i\theta}}.$$

Mittels Fouriertransformationstabelle erhalten wir die Impulsantwort

$$h_1[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n] + \left(-\frac{1}{4}\right)^n \sigma[n].$$

ii. Aus der Definition des Frequenzgangs von H_1

$$\hat{h}_1(\theta) = \frac{\hat{y}_1(\theta)}{\hat{x}_1(\theta)} = \frac{24}{8 - 2e^{-2\pi i\theta} - e^{-4\pi i\theta}}$$

folgt

$$24\hat{x}_1(\theta) = 8\hat{y}_1(\theta) - 2e^{-2\pi i\theta}\hat{y}_1(\theta) - e^{-4\pi i\theta}\hat{y}_1(\theta). \tag{13}$$

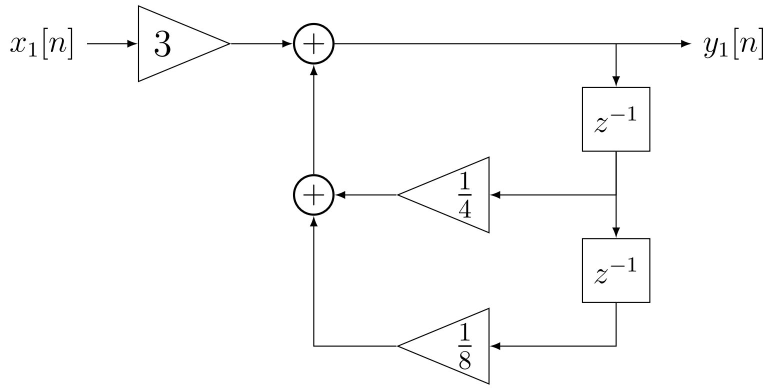
Mittels Fouriertransformationstabelle erhalten wir die Differenzengleichung

$$24x_1[n] = 8y_1[n] - 2y_1[n-1] - y_1[n-2].$$

Durch Umformen ergibt sich die Differenzengleichung

$$y_1[n] = 3x_1[n] + \frac{1}{4}y_1[n-1] + \frac{1}{8}y_1[n-2].$$

iii. Das Blockschaltbild lässt sich aus der Differenzengleichung ermitteln.



(b) i. Um zu beurteilen ob H_2 kausal ist, betrachten wir die Werte von $h_2[n]$ für $n \leq -1$. Wir haben $h_2[n] = 0$ für $n \leq -2$ und $h_2[-1] = 5\beta$. Da $\beta \neq 0$ ist $h_2[n]$ nicht kausal.

ii. Eine hinreichende Bedingung für BIBO-Stabilität eines zeitdiskreten LTI-Systems mit Impulsantwort $h[n]$ ist $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$. Für $h_2[n]$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_2[n]| &= 5|\beta| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| 2 \cdot 2^{\alpha n} + 5 \left(\frac{1}{\beta} \right)^n \right| \\ &\leq 5|\beta| + 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\alpha n} + 5 \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\beta} \right|^n . \end{aligned} \tag{14}$$

Der Ausdruck (14) ist genau dann endlich, wenn die beiden unendlichen Summen konvergieren. Wir wissen, dass die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ genau dann konvergiert, wenn $|q| < 1$. Somit ist H_2 BIBO-stabil wenn $\alpha < 0$ und $|\beta| > 1$.

iii. Die Sprungantwort eines LTI-Systems ist die Systemantwort auf das Eingangssignal $\sigma[n]$, d.h.

$$a_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma[n-k] h_2[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h_2[k].$$

Somit erhalten wir das Gleichungssystem

$$a_2[-1] = 5\beta = -20 \tag{15}$$

$$a_2[1] = 2(1 + 2^{\alpha}) + 5 \left(\beta + 1 + \frac{1}{\beta} \right) = -\frac{55}{4}. \tag{16}$$

Aus (15) folgt $\beta = -4$. Durch Einsetzen von β in (16) erhalten wir

$$\begin{aligned} 2 + 2 \cdot 2^{\alpha} - \frac{65}{4} &= -\frac{55}{4} \\ \implies 2^{\alpha} &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

und somit $\alpha = -2$. Da α und β in die unter ii) bestimmten Wertebereiche fallen ist h_2 für die hier ermittelten Werte BIBO-stabil.

4. **Aufgabe**

(a) Das zeitdiskrete periodische Signal $\cos(\pi n)$ hat Periodendauer 2 und das zeitdiskrete periodische Signal $\sin(\pi n/3)$ hat Periodendauer 6. Somit ist die Periodendauer von $x[n] = 2\sin(\pi n/3)\cos(\pi n)$ höchstens gleich 6. Um die tatsächliche Periodendauer von $x[n]$ zu bestimmen, berechnen wir explizit die Werte $x[n]$ für $n = 0, \ldots, 5$. Dazu bestimmen wir zuerst $2\sin(\pi n/3)$ für $n = 0, \ldots, 5$. Für $n = 0$ erhalten wir $2\sin(0) = 0$. Aus $\cos(\pi/3) = -\cos(2\pi/3) = 1/2$ erhalten wir $2\sin(\pi/3) = 2\sin(2\pi/3) = 2\sqrt{1-1/4} = \sqrt{3}$, wobei wir $\sin(t) = \sqrt{1-\cos^2(t)}$, für $0 \le t \le \pi$, verwendet haben. Mit $\sin(t+\pi) = -\sin(t)$, für $t \in \mathbb{R}$, bekommen wir die restlichen Werte $2\sin(\pi) = 0$ und $2\sin(4\pi/3) = 2\sin(5\pi/3) = -\sqrt{3}$. Des Weiteren ist $\cos(\pi n) = 1$, für $n = 0, 2, 4$, und $\cos(\pi n) = -1$, für $n = 1, 3, 5$. Da $x[n]$ das Produkt von $2\sin(\pi n/3)$ und $\cos(\pi n)$ ist, bekommen wir zusammenfassend die folgende Tabelle

	0	1	2	3	4	5
$\cos(\pi n)$	1	-1	1	-1	1	-1
$2\sin(\pi n/3)$	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
$x[n]$	0	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

.

Die tatsächliche Periodendauer von $x[n]$ ist daher $M = 3$. Die Periodendauer von $y[n]$ ist $N = 3$, da $\cos(t)$ eine 2π-periodische Funktion ist.

(b) Wir können das zeitdiskrete periodische Signal $x[n]$ in der folgenden Form darstellen:

$$\begin{aligned} x[n] &= 2\sin(\pi n/3)\cos(\pi n) \\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{\pi i n/3} - e^{-\pi i n/3}\right)\left(e^{\pi i n} + e^{-\pi i n}\right) \\ &= \frac{1}{i}\left(e^{\pi i n/3} - e^{-\pi i n/3}\right)e^{\pi i n} \\ &= i\left(e^{2\pi i n/3} - e^{4\pi i n/3}\right). \end{aligned}$$

Aus der Formel zur Rücktransformation

$$x[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\hat{x}[k]e^{2\pi i k n/M} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2}\hat{x}[k]e^{2\pi i k n/3}$$

erhalten wir durch Koeffizientenvergleich die Werte

k	$\hat{x}[k]$
0	0
1	$3i$
2	$-3i$

.

(c) Aus (a) folgt $K = M = N = 3$. Mit Hilfe der Formelsammlung erhalten wir $\hat{z}[k] = \hat{x}[k]\hat{y}[k]$. Da $\hat{x}[k]$ bereits in (b) berechnet wurde, brauchen wir nur noch $\hat{y}[k]$, um $\hat{z}[k]$ zu bestimmen. Mit Hilfe der Formelsammlung bekommen wir direkt die Werte

k	$\hat{y}[k]$
0	0
1	$-1/2$
2	$-1/2$

,

und damit in weiterer Folge

k	$\hat{z}[k]$
0	0
1	$-3i/2$
2	$3i/2$

.

Das zeitdiskrete periodische Signal $z[n]$ erhalten wir schliesslich durch Rücktransformation gemäss:

$$\begin{aligned} z[n] &= \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\hat{z}[k]e^{2\pi ikn/K} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2}\hat{z}[k]e^{2\pi ikn/3} \\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{2\pi in/3} - e^{4\pi in/3}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{2\pi in/3} - e^{-2\pi in/3}\right) \\ &= \sin(2\pi n/3). \end{aligned}$$

(d) Mit Hilfe der Transformationstabelle erhalten wir

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

oder in Komponentenschreibweise

$$\hat{x}_1[k] = 5\delta[k].$$

Zur Berechnung von $\hat{\mathbf{x}}_2$ führen wir zunächst das Hilfssignal

$$y[n] \triangleq x_2[n+2]$$

ein (man beachte, dass es sich hierbei um eine zyklische Verschiebung handelt). Mit Hilfe der Transformationstabelle ergibt sich nun

$$\hat{y}[k] = \frac{\sin(5\pi k/6)}{\sin(\pi k/6)}.$$

Aus $x_2[n] = y[n-2]$ (zyklische Verschiebung) erhalten wir die DFT von $\mathbf{x}_2$ mit Hilfe der Verschiebungseigenschaft der DFT gemäss

$$\hat{x}_2[k] = e^{-2\pi ik/3} \frac{\sin(5\pi k/6)}{\sin(\pi k/6)}.$$

Interpretation: Das Hinzufügen der 0 hat also eine „sinc-artige“ Verteilung des zuvor an einer Komponente konzentrierten Wertes in der DFT bewirkt.