Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
2. Februar 2018

Bitte beachten Sie:

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung ist die Formelsammlung erlaubt, die Sie von uns erhalten. Die Benutzung von Rechnern/Smartphones/Tablets jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen Sie darauf hin, dass Studierende bei unehrlichem Handeln während der Prüfung den Strafnormen der Disziplinarordnung RSETHZ 361.1 der ETHZ unterstehen.

Vor der Klausur:

1. Dieses Angabenheft hat 6 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie bitte sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen ausschliesslich auf die bereitgestellten leeren Blätter. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie weitere Blätter.

Nach der Klausur:

5. Nummerieren Sie die Lösungsblätter und beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen. Tragen Sie die Anzahl der Lösungsblätter (exklusive der Aufgabenblätter), die Sie abgeben möchten, auf dieser Seite unten ein und unterschreiben Sie. Alle Aufgabenblätter müssen abgegeben werden.

Nachname: .... Vorname: ....

Legi-Nr.: ....

Anzahl abgegebener Lösungsblätter: ....

Unterschrift: ....

1. **Aufgabe** (25 Punkte)

   (a) (15 Punkte) Es sei $B > 0$ fest. Wir betrachten ein auf $[-B, B]$ band-begrenztes Signal $x \in L^2(\mathbb{R})$, d.h. $\widehat{x}(f) = 0$ für alle $f \in \mathbb{R}$ mit $|f| > B$. In jeder der folgenden drei Teilaufgaben soll eine Rekonstruktionsformel bestimmt werden, welche aus einem gegebenen Signal $y_\ell(t)$ das ursprüngliche Signal $x(t)$ wiedergewinnt. *Hinweis: Betrachten Sie die Probleme im Frequenzbereich.*

      i. (5 Punkte) $y_1(t) = x(t-c) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \;\; T < \frac{1}{2B}, \;\; c \in \mathbb{R}$,

      ii. (5 Punkte) $y_2(t) = x(t)\cos(2\pi B t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \;\; T < \frac{1}{4B}$,

      iii. (5 Punkte) $y_3(t) = \Big(x(t) * \big[e^{-at}\sigma(t)\big]\Big) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT), \;\; T < \frac{1}{2B}, \; \mathfrak{Re}\{a\} > 0.$

   (b) (10 Punkte) Betrachten Sie das Signal

$$x(t) = \left(\frac{\sin(20\pi t)}{\pi t}\right)^2,$$

   das mit einer Frequenz von $f_s = 30\text{Hz}$ gemäss

$$g(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{f_s}\right)$$

   abgetastet wird.

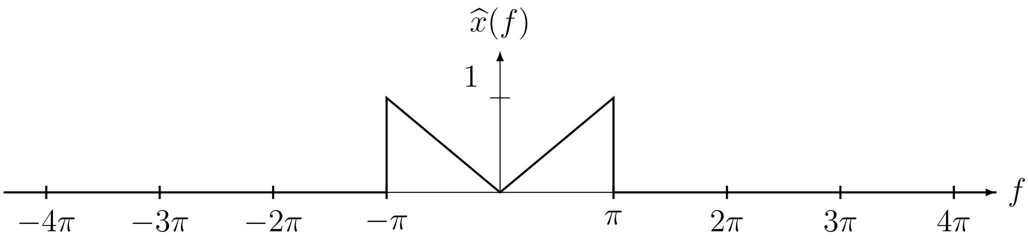
      i. (4 Punkte) Zeichnen Sie das Spektrum des Signals $x(t)$.

      ii. (6 Punkte) Bestimmen Sie das grösstmögliche f_0, sodass

$$\hat{g}(f) = 30\,\hat{x}(f) \;\; \text{für} \;\; |f| \leq f_0,$$

      gilt, wobei $\hat{x}(f)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$ ist.

2. **Aufgabe** (25 Punkte) In dieser Aufgabe betrachten wir das zeitkontinuierliche Signal $x(t)$ mit abgebildetem Spektrum $\widehat{x}(f)$:



(a) (5 Punkte) Bestimmen Sie das zugehörige Zeitsignal $x(t)$.

(b) (3 Punkte) Geben Sie an, ob das Signal $x(t)$

i) gerade ist, d.h. ob

$$x(t) = x(-t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

gilt,

ii) reellwertig ist, d.h. ob

$$x(t) = x^*(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

gilt.

(c) (4 Punkte) Berechnen Sie die Energie

$$E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

von $x(t)$ sowie die Energie

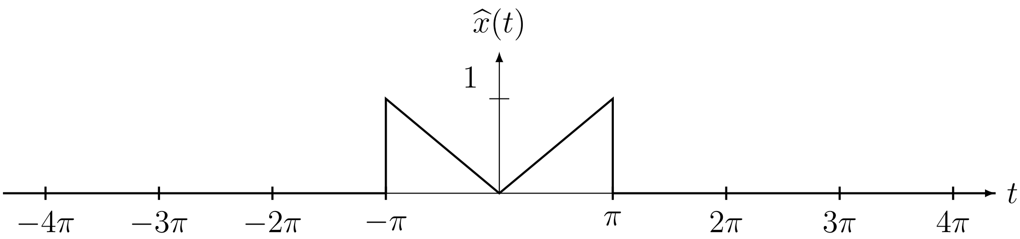
$$E_{\widehat{x}} = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{x}(f)|^2 \mathrm{d}f$$

von $\widehat{x}(f)$.

Nehmen Sie für die folgenden beiden Teilaufgaben (d) und (e) an, dass

$$h(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(t - 3k\pi), \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

wobei $\widehat{x}(t)$ gegeben ist durch



(d) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Periode T von $h(t)$, d.h. finden Sie das kleinstmögliche $T > 0$, so dass

$$h(t+T) = h(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

(e) (3 Punkte) Berechnen Sie den 0-ten Fourierreihenkoeffizienten des T-periodischen Signals $h(t)$.

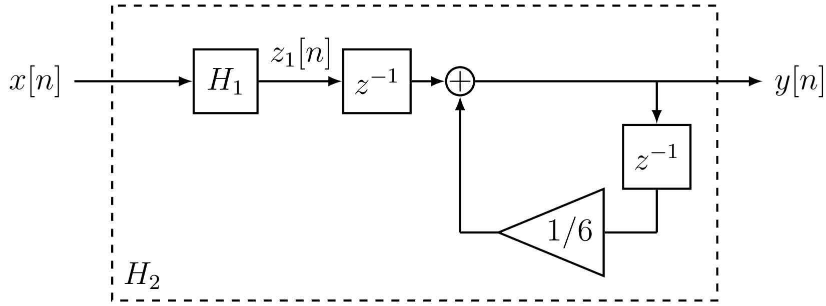
(f) (7 Punkte) Nehmen Sie in dieser Teilaufgabe an, dass $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ die Fourierreihenkoeffizienten eines beliebigen T-periodischen Signals $y(t)$ sind. Zeigen Sie, dass das Signal $y'(t) := \frac{dy(t)}{dt}$ ebenfalls T-periodisch ist und beweisen Sie anschliessend folgende Identität:

$$d_k = \frac{2\pi i k}{T} c_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

wobei $\{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ die Fourierreihenkoeffizienten des Signals $y'(t)$ sind.

3. **Aufgabe** (25 Punkte)

Wir betrachten das folgende zeitdiskrete LTI-System



(a) (13 Punkte) Es sei

$$\hat{h}_1(\theta) = \frac{18 - e^{-2\pi i\theta}}{6 + e^{-2\pi i\theta} - e^{-4\pi i\theta}}$$

der Frequenzgang von H_1. Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_1[n]$ des Systems H_1, sowie die zu H_1 gehörige Differenzengleichung und das zugehörige Blockschaltbild.

(b) (5 Punkte) Bestimmen Sie den Frequenzgang $\hat{h}_2(\theta)$ des Gesamtsystems H_2.

(c) (7 Punkte) Bestimmen Sie, ob die LTI-Systeme mit den folgenden Impulsantworten kausal und BIBO-stabil sind:

i) $h[n] = \frac{1}{3}\sigma[n+1] - \frac{1}{3}$

ii) $h[n] = n(1/2)^n\sigma[n+1]$

wobei $\sigma[n]$ die Sprungfunktion bezeichnet.

Hinweis zu ii): Verwenden Sie das Quotientenkriterium um zu bestimmen, ob eine Reihe konvergent ist.

4. **Aufgabe** (25 Punkte) In dieser Aufgabe soll das folgende Prinzip illustriert werden: Wenn die diskrete Fouriertransformierte (DFT) eines Signals bekannt ist, kann die Bestimmung der DFT einer Funktion dieses Signals oft einfacher erfolgen als durch direkte Berechnung. Es sei $x[n]$ ein allgemeines M-periodisches Signal, $M \in \mathbb{N}$, mit zugehöriger M-periodischer DFT

$$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{M-1} x[n] e^{-2\pi i k n / M}, \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

(a) (8 Punkte) Es sei nun $N = ML$ für $L \in \mathbb{N}$. Ferner sei das Signal $y[n]$ gegeben durch

$$y[n] = \begin{cases} x[n/L], & \text{wenn } n = mL \text{ mit } m \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass aus der M-Periodizität des Signals $x[n]$ die N-Periodizität des Signals $y[n]$ folgt.

Skizzieren Sie für $M = 3$ und $L = 2$ das N-periodische Signal $y[n]$ im Bereich $n \in \{0, \ldots, N-1\}$ für ein M-periodisches Signal $x[n]$ Ihrer Wahl, welches nicht identisch gleich Null ist.

Berechnen Sie für allgemeines L und M die DFT $\hat{y}[k]$ des N-periodischen Signals $y[n]$ in (1) in Abhängigkeit von der DFT $\hat{x}[k]$ des *allgemeinen* M-periodischen Signals $x[n]$.

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie explizit für $M = 3$, $L = 2$ und $N = ML = 6$ die Werte der DFT $\hat{y}[k]$ des N-periodischen Signals $y[n]$ in (1) im Bereich $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ für das M-periodische Signal $x[n] = \cos(2\pi n/M)$.

(c) (9 Punkte) Es sei nun $N \in \mathbb{N}$ allgemein und $x[n]$ ein allgemeines $(2N)$-periodisches Signal. Ferner sei das Signal $z[n]$ gegeben durch

$$z[n] = x[n] + x[n+N], \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass aus der $(2N)$-Periodizität des Signals $x[n]$ die N-Periodizität des Signals $z[n]$ folgt.

Skizzieren Sie für $N = 3$ das N-periodische Signal $z[n]$ im Bereich $n \in \{0, \ldots, N-1\}$ für ein $(2N)$-periodisches Signal $x[n]$ Ihrer Wahl, welches nicht identisch gleich Null ist.

Berechnen Sie für allgemeines N die DFT $\hat{z}[k]$ des N-periodischen Signals $z[n]$ in (2) in Abhängigkeit von der DFT $\hat{x}[k]$ des *allgemeinen* $(2N)$-periodischen Signals $x[n]$.

(d) (4 Punkte) Berechnen Sie für $N = 3$ explizit die DFT $\hat{z}[k]$ des N-periodischen Signals $z[n]$ in (2) für das $(2N)$-periodische Signal $x[n] = \cos(2\pi n/N)$.