Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Lösung zur
Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
2. Februar 2018

1. **Aufgabe**

(a) Es sei $z(t)$ ein beliebiges Signal sowie $y(t) = z(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$. Dann haben wir für die Fouriertransformierte von $y(t)$

$$\hat{y}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{z}\Big(f - \frac{k}{T}\Big).$$

Falls $z(t) = x(t)$, mit $x(t)$ gemäss Angabe, und $h_{\text{TP}}(t)$ ein ideales Tiefpassfilter ist gemäss

$$\hat{h}_{\text{TP}}(f) = \begin{cases} T, & \text{falls } |f| \leq f_g, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $B \leq f_g < \frac{1}{T} - B$, dann gilt $x(t) = (y * h_{\text{TP}})(t)$, d.h. $x(t)$ kann exakt aus $y(t)$ wiedergewonnen werden.

i. Es sei $z(t) = x(t-c)$, und damit $\hat{z}(f) = e^{-2\pi i f c}\hat{x}(f)$. Daraus folgt

$$\hat{y}(f) = \frac{e^{-2\pi i f c}}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\Big(f - \frac{k}{T}\Big) e^{\frac{2\pi i c k}{T}}.$$

Um $x(t)$ aus $y(t)$ zu rekonstruieren bemerken wir, dass die zu $k \neq 0$ gehörigen spektralen Komponenten $\hat{x}(f - \frac{k}{T})$ dank $\frac{1}{T} > 2B$ nicht mit der zu $k = 0$ gehörigen spektralen Komponente $\widehat{x}(f)$ überlappen, und wir daher $\hat{x}(f)\frac{e^{-2\pi i f c}}{T}$ durch Tiefpassfilterung extrahieren können. Damit ergibt sich die Rekonstruktionsformel zu $x(t) = (y * h^{(1)})(t)$ mit

$$\hat{h}^{(1)}(f) = \begin{cases} T e^{2\pi i f c}, & \text{falls } |f| \leq f_g, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $B \leq f_g < \frac{1}{T} - B$.

ii. Es sei $z(t) = \cos(2\pi B t)x(t)$, und damit $\hat{z}(f) = \frac{1}{2}\Big(\hat{x}(f+B) + \hat{x}(f-B)\Big)$. Daraus folgt

$$\hat{y}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\hat{x}\Big(f + B - \frac{k}{T}\Big) + \hat{x}\Big(f - B - \frac{k}{T}\Big)\right).$$

Damit erhalten wir nun aus Argumenten analog zu Teilaufgabe i., und dank $\frac{1}{T} > 4B$,

$$\hat{y}(f) = \begin{cases} \frac{1}{2T}\,\hat{x}(f+B), & \text{falls } -B \le f \le 0, \\ \\ \frac{1}{2T}\,\hat{x}(f-B), & \text{falls } 0 \le f \le B. \end{cases}$$

Eine Möglichkeit $x(t)$ aus $y(t)$ zu extrahieren besteht darin, zunächst ein Tiefpassfilter mit Bandbreite B anzuwenden, das resultierende Signal mit $\cos(2\pi Bt)$ zu multiplizieren und das Ergebnis davon einem Tiefpassfilter wieder mit Bandbreite B zuzuführen. Konkret lautet die zugehörige Rekonstruktionsformel

$$x(t) = \left(\left(\cos(2\pi Bt)\big(y * h^{(2)}\big)(t)\right) * \frac{h^{(2)}}{T}\right)(t),$$

wobei

$$\hat{h}^{(2)}(f) = \begin{cases} 2T, & \text{falls } |f| \le B, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

iii. Es sei $z(t) = x(t) * \left[e^{-at}\sigma(t)\right]$, und daher $\hat{z}(f) = \frac{\hat{x}(f)}{a+2\pi i f}$. Damit folgt

$$\hat{y}(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right)\left(\frac{1}{a + 2\pi i(f - k/T)}\right).$$

Aus Argumenten analog zu Teilaufgabe i. folgt, dass $x(t) = (y * h^{(3)})(t)$, mit

$$\hat{h}^{(3)}(f) = \begin{cases} T(a + 2\pi i f), & \text{falls } |f| \le f_g, \\ 0, & \text{falls } |f| > f_g, \end{cases}$$

wobei $B \le f_g < \frac{1}{T} - B$.

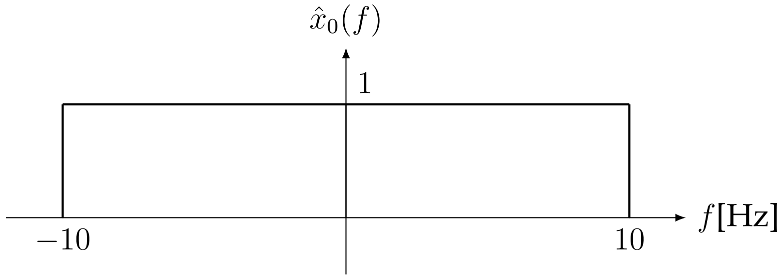
(b) i. Es gilt

$$x(t) = \left(\frac{\sin(20\pi t)}{\pi t}\right)^2 = x_0^2(t),$$

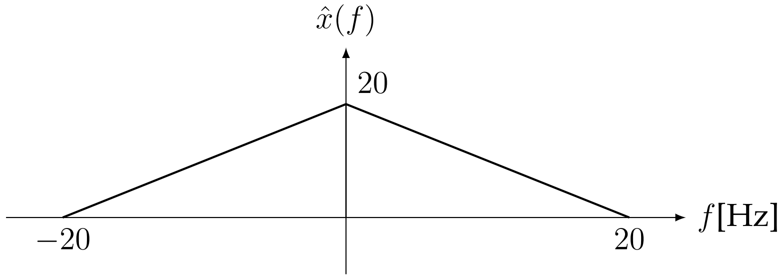
wobei

$$x_0(t) = \frac{\sin(20\pi t)}{\pi t}.$$

Das Spektrum des Signals $x_0(t)$ ist gegeben durch (s. Gleichung Nr. 27 in der Formelsammlung)



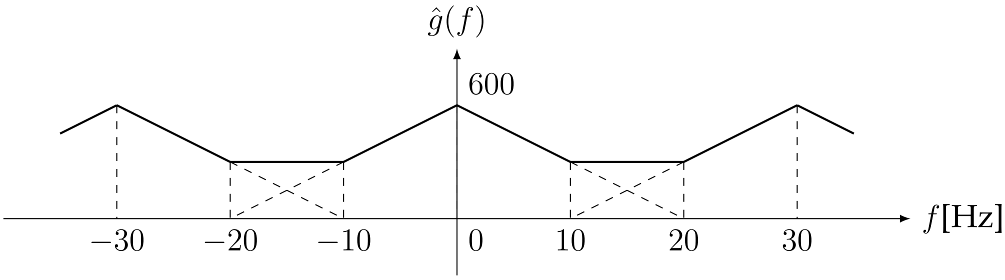
Das Spektrum des Signals $x(t)$ ist nach dem Faltungstheorem gegeben durch $\hat{x}(f) = (\hat{x}_0 * \hat{x}_0)(f)$ als



ii. Wir erinnern uns daran, dass

$$\mathcal{F}\left\{x(\cdot)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\Big(\cdot-\frac{n}{f_s}\Big)\right\}(f) = f_s\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{x}(f-kf_s) = 30\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{x}(f-30k).$$

Das Spektrum des Signals $g(t)$ ist damit gegeben durch



Der grösstmögliche Wert von f_0, für den

$$\hat{g}(f) = 30\,\hat{x}(f) \;\text{ für } |f| \leq f_0,$$

gilt, ist somit $f_0 = 10\text{Hz}$.

2. **Aufgabe**

(a) Wir können das Spektrum $\widehat{x}(f)$ zerlegen gemäss

$$\widehat{x}(f) = \widehat{r}(f) - \widehat{d}(f),$$

wobei

$$\widehat{r}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leqslant \pi, \\ 0, & |f| > \pi, \end{cases}$$

und

$$\widehat{d}(f) = \begin{cases} 1 - \frac{|f|}{\pi}, & |f| \leqslant \pi, \\ 0, & |f| > \pi. \end{cases}$$

Für die Fourierrücktransformierte des Rechteckssignals erhalten wir mit Hilfe der Formelsammlung (Formel Nr. 27)

$$r(t) = \frac{\sin(2\pi^2 t)}{\pi t}.$$

Für das Dreieckssignal folgt mit der Formelsammlung (Gleichung Nr. 29) und unter Verwendung der Dualität der Fouriertransformation

$$\widehat{x}(t) \qquad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \qquad x(-f)\,,$$

dass

$$d(t) = \frac{\sin^2(-\pi^2 t)}{\pi^3 t^2} = \frac{\sin^2(\pi^2 t)}{\pi^3 t^2}.$$

Insgesamt haben wir also

$$x(t) = r(t) - d(t) = \frac{\sin(2\pi^2 t)}{\pi t} - \frac{\sin^2(\pi^2 t)}{\pi^3 t^2}.$$

(b)
- Das Signal ist gerade, denn es gilt

$$x(-t) = \frac{\sin(-2\pi^2 t)}{-\pi t} - \frac{\sin^2(-\pi^2 t)}{\pi^3(-t)^2} = \frac{-\sin(2\pi^2 t)}{-\pi t} - \frac{(-1)^2 \sin^2(\pi^2 t)}{(-1)^2 \pi^3 t^2} = x(t).$$

- Als Linearkombination von reellwertigen Funktionen ist $x(t)$ auch reellwertig.

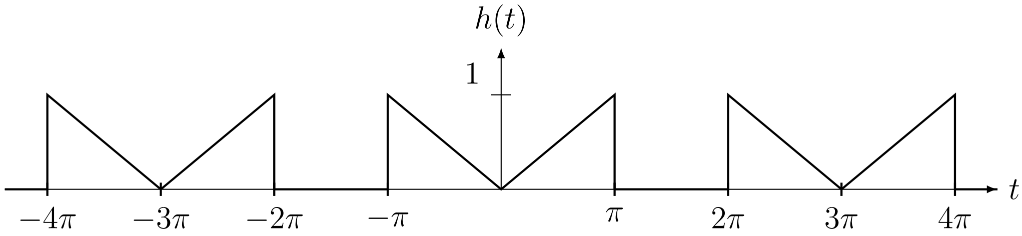
(c) Aus der Parsevalschen Beziehung folgt, dass

$$E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{x}(f)|^2 \mathrm{d}f = E_{\widehat{x}}.$$

Es reicht somit $E_{\widehat{x}}$ zu berechnen:

$$E_{\widehat{x}} = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{x}(f)|^2 \mathrm{d}f = 2\int_0^{\pi} \left(\frac{f}{\pi}\right)^2 \mathrm{d}f = \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{f^3}{3}\right]_{f=0}^{f=\pi} = \frac{2\,\pi}{3}.$$

(d) Der Graph der Funktion $h(t)$ sieht wie folgt aus:



Daraus kann man ablesen, dass $T = 3\pi$. Formal kann man dies auch wie folgt zeigen:

$$\begin{aligned} h(t+3\pi) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(t-3k\pi+3\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(t-3\pi(k-1)) \\ &= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(t-3\pi k') = h(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $k' = k-1$ verwendet haben.

(e) Der 0-te Fourierreihenkoeffizient von $h(t)$ ist gegeben durch

$$c_0 = \frac{1}{3\pi}\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} h(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{3\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\pi}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{3\pi}\left[\frac{t^2}{2\pi}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{3}.$$

(f) Aus der T-Periodizität des Signals $y(t)$ folgt

$$y(t) = y(t+T), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Differenzieren beider Seiten in (1) ergibt

$$y'(t) = y'(t+T), \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

woraus direkt die T-Periodizität des Signals $y'(t)$ folgt. Für die Berechnung der Fourierreihenkoeffizienten von $y'(t)$ erhalten wir für $k = 0$

$$d_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\Big[y(t)\Big]_{t=0}^{t=T} = \frac{1}{T}(y(T)-y(0)) = 0 = \frac{2\pi i\cdot 0}{T}c_0,$$

wobei wir die T-Periodizität des Signals $y(t)$ verwendet haben. Für $k \neq 0$ haben wir

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{T}\int_0^T y'(t)e^{-2\pi ikt/T}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\Big[y(t)e^{-2\pi ikt/T}\Big]_{t=0}^{t=T} + \frac{2\pi ik}{T^2}\int_0^T y(t)e^{-2\pi ikt/T}\mathrm{d}t \qquad (2) \\ &= \frac{1}{T}(y(T)-y(0)) + \frac{2\pi ik}{T}c_k = \frac{2\pi ik}{T}c_k, \qquad (3) \end{aligned}$$

wobei wir in (2) partiell integriert haben und in (3) die T-Periodizität des Signals $y(t)$ verwendet wurde. Somit haben wir die Identität

$$d_k = \frac{2\pi ik}{T}c_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

gezeigt.

3. **Aufgabe**

(a) Zunächst bemerken wir, dass

$$\hat{h}_1(\theta) = \frac{18 - e^{-2\pi i\theta}}{6 + e^{-2\pi i\theta} - e^{-4\pi i\theta}} = \frac{A}{3 - e^{-2\pi i\theta}} + \frac{B}{2 + e^{-2\pi i\theta}}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 2A + 3B &= 18, \\ A - B &= -1, \end{aligned}$$

was zu $A = 3$ und $B = 4$ führt. Somit erhalten wir

$$\hat{h}_1(\theta) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-2\pi i\theta}} + \frac{2}{1 + \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta}}.$$

Unter Benutzung der Formelsammlung (Gleichung Nr. 73) erhalten wir

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sigma[n] + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n].$$

Um die zugehörige Differenzengleichung zu bestimmen, bemerken wir zunächst, dass

$$\frac{\hat{z}_1(\theta)}{\hat{x}(\theta)} = \frac{18 - e^{-2\pi i\theta}}{6 + e^{-2\pi i\theta} - e^{-4\pi i\theta}}.$$

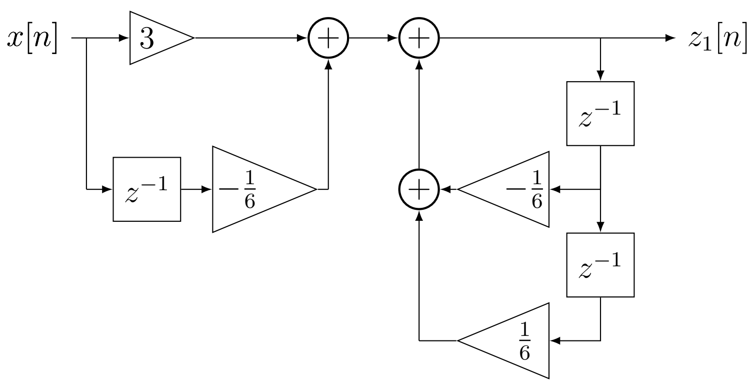
Daraus folgt nun

$$18\hat{x}(\theta) - e^{-2\pi i\theta}\hat{x}(\theta) = 6\hat{z}_1(\theta) + e^{-2\pi i\theta}\hat{z}_1(\theta) - e^{-4\pi i\theta}\hat{z}_1(\theta).$$

Nun erhalten wir unter Verwendung der Formelsammlung (Gleichung Nr. 55)

$$18x[n] - x[n-1] = 6z_1[n] + z_1[n-1] - z_1[n-2] \tag{4}$$

und damit das Blockschaltbild



(b) Aus dem Blockschaltbild erhalten wir

$$z_1[n-1] + \frac{1}{6}y[n-1] = y[n].$$

Daraus ergibt sich durch Einsetzen in (4)

$$18x[n]-x[n-1] = \Big(6y[n+1]-y[n]\Big)+\Big(y[n]-\frac{1}{6}y[n-1]\Big)-\Big(y[n-1]-\frac{1}{6}y[n-2]\Big),$$

was sich vereinfachen lässt zu

$$18x[n] - x[n-1] = 6y[n+1] - \frac{7}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2].$$

Unter Benutzung der Formelsammlung (Gleichung Nr. 55) erhalten wir nun

$$18\hat{x}(\theta) - e^{-2\pi i\theta}\hat{x}(\theta) = 6\hat{y}(\theta)e^{2\pi i\theta} - \frac{7}{6}\hat{y}(\theta)e^{-2\pi i\theta} + \frac{1}{6}\hat{y}(\theta)e^{-4\pi i\theta}.$$

Dies ergibt

$$\hat{h}_2(\theta) = \frac{18 - e^{-2\pi i\theta}}{6e^{2\pi i\theta} - \frac{7}{6}e^{-2\pi i\theta} + \frac{1}{6}e^{-4\pi i\theta}}.$$

(c) i) Auf Grund von $h[n] = -\frac{1}{3}$, für $n \leq -2$, ist das System nicht kausal. Man betrachte nun das beschränkte Eingangssignal $x[n] = \sigma[n]$. Das zugehörige Ausgangssignal ist gegeben durch

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(\frac{1}{3}\sigma[n+1-k] - \frac{1}{3}\Big)\sigma[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{3}\sigma[n+1-k] - \frac{1}{3}\Big).$$

Für $n < -1$ haben wir

$$y[n] = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} = -\infty.$$

Somit folgt, dass das System nicht BIBO-stabil ist.

ii) Wir haben $h[-1] = -2$. Daher ist das System nicht kausal. Für die BIBO-Stabilität bemerken wir zunächst

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} n(1/2)^n.$$

Nun wenden wir das Quotientenkriterium für Reihen an, und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)(1/2)^{n+1}}{n(1/2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\frac{1}{2}\right| = 1/2 < 1.$$

Es folgt, dass die Reihe konvergiert, sodass das System BIBO-stabil ist.

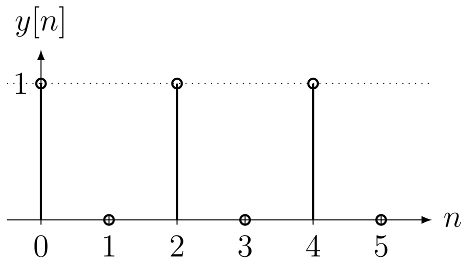
4. **Aufgabe**

(a) Wir betrachten zunächst den Fall $n = mL$, $m \in \mathbb{Z}$, und erhalten dafür

$$\begin{aligned} y[mL + N] &= y[(m + M)L] \\ &= x[m + M] && (5) \\ &= x[m] && (6) \\ &= y[mL], \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z}, && (7) \end{aligned}$$

wobei wir in (5) und (7) die Definition des Signals $y[n]$ und in (6) die M-Periodizität des Signals $x[n]$ verwendet haben. Für $n \notin \{mL : m \in \mathbb{Z}\}$ ist auch $n + N = n + ML \notin \{mL : m \in \mathbb{Z}\}$, und deshalb folgt unmittelbar aus der Definition des Signals $y[n]$, dass $y[n] = y[n + N] = 0$ für alle $n \notin \{mL : m \in \mathbb{Z}\}$ gelten muss.

Wir wählen $x[n] = 1$, für $n \in \{0, 1, 2\}$. Damit erhalten wir $y[0] = x[0] = 1$, $y[2] = x[1] = 1$, $y[4] = x[2] = 1$ und $y[1] = y[3] = y[5] = 0$. Der Graph des 6-periodischen Signals $y[n]$ sieht also im Bereich $n \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ wie folgt aus:



Wir betrachten nun ein *allgemeines* M-periodisches Signal $x[n]$. Die DFT $\hat{y}[k]$ des Signals $y[n]$ ist

$$\begin{aligned} \hat{y}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-2\pi i k n/N} \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} y[mL] e^{-2\pi i k m L/(ML)} \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} x[m] e^{-2\pi i k m/M} \\ &= \hat{x}[k], \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Da $\hat{x}[k]$ M-periodisch ist, ist $\hat{y}[k]$ die periodische Fortsetzung von $\hat{x}[k]$.

(b) Wir betrachten das 3-periodische Signal $x[n]$ gegeben durch $x[n] = \cos(2\pi n/3)$. Mit Hilfe von Gl. 88 in der Formelsammlung erhalten wir

$$\hat{x}[k] = 3/2(\delta[k-2] + \delta[k-1]), \quad \text{für } k = 0, 1, 2. \tag{8}$$

Folglich ist das Signal $\hat{y}[k]$ gegeben durch

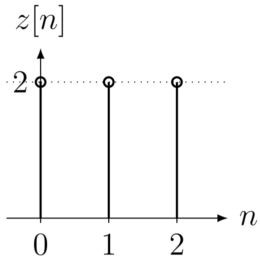
k	0	1	2	3	4	5
$\hat{y}[k]$	0	$3/2$	$3/2$	0	$3/2$	$3/2$

(c) Es gilt

$$z[n+N] = x[n+N] + x[n+2N] \tag{9}$$
$$= x[n+N] + x[n] \tag{10}$$
$$= z[n], \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

wobei wir in (9) und (11) die Definition des Signals $z[n]$ und in (10) die $(2N)$-Periodizität des Signals $x[n]$ verwendet haben.

Wir wählen nun $x[n] = 1$, für $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Damit erhalten wir $z[0] = x[0] + x[3] = 2$, $z[1] = x[1] + x[4] = 2$ und $z[2] = x[2] + x[5] = 2$. Der Graph des 3-periodischen Signals $z[n]$ sieht also im Bereich $n \in \{0, 1, 2\}$ wie folgt aus:



Wir betrachten nun ein *allgemeines* $(2N)$-periodisches Signal $x[n]$. Die DFT $\hat{z}[k]$ des N-periodischen Signals $z[n] = x[n] + x[n+N]$ ist

$$\begin{aligned}
\hat{z}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} z[n] e^{-2\pi i k n/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] + x[n+N]) e^{-2\pi i k n/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{1} x[n+lN] e^{-2\pi i k n/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{1} x[n+lN] e^{-2\pi i k (n+lN)/N} \\
&= \sum_{m=0}^{2N-1} x[m] e^{-2\pi i k m/N} \\
&= \sum_{m=0}^{2N-1} x[m] e^{-4\pi i k m/(2N)} \\
&= \hat{x}[2k], \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{12}$$

(d) Wir betrachten nun das 6-periodische Signal $x[n] = \cos(2\pi n/3)$. Mit Hilfe von Gl. 88 in der Formelsammlung erhalten wir

$$\hat{x}[k] = 3(\delta[k-4] + \delta[k-2]), \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, 5. \tag{13}$$

Einsetzen von (13) in (12) für $N = 3$ ergibt

$$\begin{aligned}
\hat{z}[k] &= \hat{x}[2k] \\
&= 3(\delta[2k-4] + \delta[2k-2]), \quad \text{für } k = 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

Die expliziten Werte von $\hat{z}[k]$ im Bereich $k \in \{0, 1, 2\}$ sind somit gegeben durch:

k	0	1	2
$\hat{z}[k]$	0	3	3