Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
17. August 2018

Bitte beachten Sie:

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung ist die Formelsammlung erlaubt, die Sie von uns erhalten. Die Benutzung von Rechnern/Smartphones/Tablets jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen Sie darauf hin, dass Studierende bei unehrlichem Handeln während der Prüfung den Strafnormen der Disziplinarordnung RSETHZ 361.1 der ETHZ unterstehen.

Vor der Klausur:

1. Dieses Angabenheft hat 8 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie bitte sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen ausschliesslich auf die bereitgestellten leeren Blätter. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie weitere Blätter.

Nach der Klausur:

5. Nummerieren Sie die Lösungsblätter und beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen. Tragen Sie die Anzahl der Lösungsblätter (exklusive der Aufgabenblätter), die Sie abgeben möchten, auf dieser Seite unten ein und unterschreiben Sie. Alle Aufgabenblätter müssen abgegeben werden.

Nachname: .... Vorname: ....

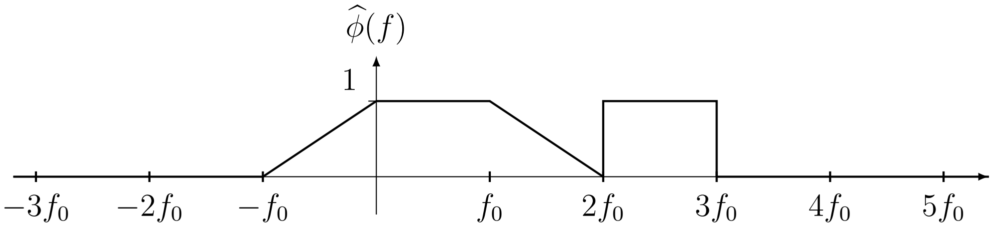
Legi-Nr.: ....

Anzahl abgegebener Lösungsblätter: ....

Unterschrift: ....

1. **Aufgabe** (26 Punkte)

Es sei $f_0 > 0$ und $\phi(t)$ ein zeitkontinuierliches Signal mit reellwertiger Fouriertransformation $\widehat{\phi}(f)$ der folgenden Form:



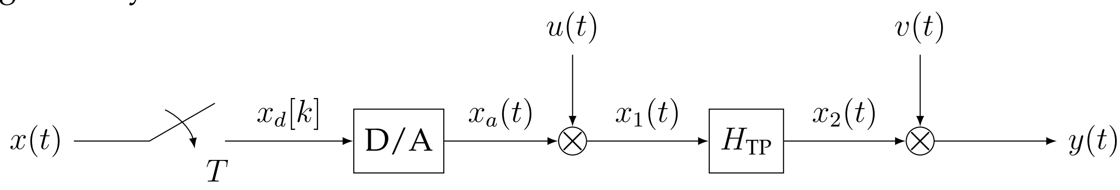
(a) (6 Punkte) Bestimmen Sie das Signal $\phi(t)$.

(b) (4 Punkte) Skizzieren Sie das Signal

$$\widehat{x}(f) := 3\widehat{\phi}(-2f + f_0) \tag{1}$$

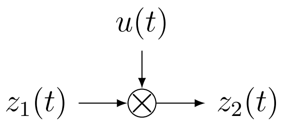
im Bereich $-2f_0 \leq f \leq 2f_0$. *Achten Sie auf die Beschriftung der Achsen!*

Die Fourierrücktransformierte $x(t)$ des Signals (1) liegt nun am Eingang des folgenden Systems an:

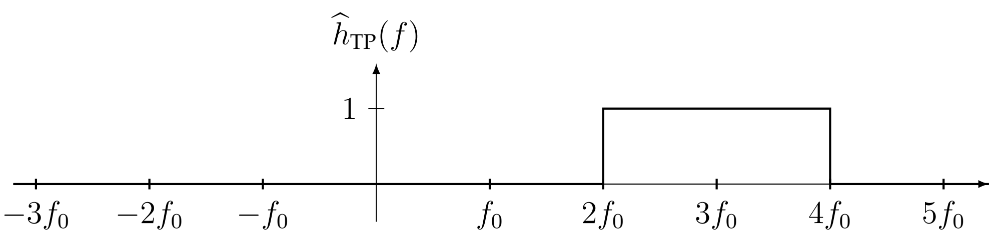


Abtastung von $x(t)$ ergibt das zeitdiskrete Signal $x_d[k] = x(kT)$. Der D/A-Wandler ist charakterisiert durch die Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_d[k]\delta(t - kT).$$

Das Modul 

implementiert die Multiplikation mit $u(t)$, d.h. $z_2(t) = u(t)z_1(t)$. Das LTI-System, das auf das Eingangssignal $x_1(t)$ mit dem Ausgangssignal $x_2(t)$ antwortet, hat einen reellwertigen Frequenzgang $\widehat{h}_{\mathrm{TP}}(f)$, der aus dem folgenden Diagramm abgelesen werden kann:



(c) (2 Punkte) Wie gross darf T gewählt werden, damit beim Abtasten des Signals $x(t)$ kein Aliasing ensteht?

(d) (4 Punkte) Ist das LTI-System H_{TP} kausal? Begründen Sie Ihre Antwort!

Nehmen Sie in den folgenden Teilaufgaben an, dass $T = 1/(2f_0)$ ist.

(e) (3 Punkte) Skizzieren Sie die Fouriertransformierte $\widehat{x}_a(f)$ des Signals $x_a(t)$ im Bereich $-3f_0 \leq f \leq 3f_0$.

(f) (7 Punkte) Bestimmen Sie zeitkontinuierliche Signale $u(t)$ und $v(t)$, sodass aus dem abgetasteten Signal $x_a(t)$ das ursprüngliche Signal $x(t)$ verzerrungsfrei rekonstruiert wird, d.h. sodass gilt $y(t) = x(t)$.

2. **Aufgabe** (24 Punkte) In dieser Aufgabe betrachten wir zeitkontinuierliche Signale $x(t)$ der folgenden Form:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \, y(t - nT), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

wobei $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $T > 0$ und $y(t)$ eine beliebige zeitkontinuierliche Funktion ist.

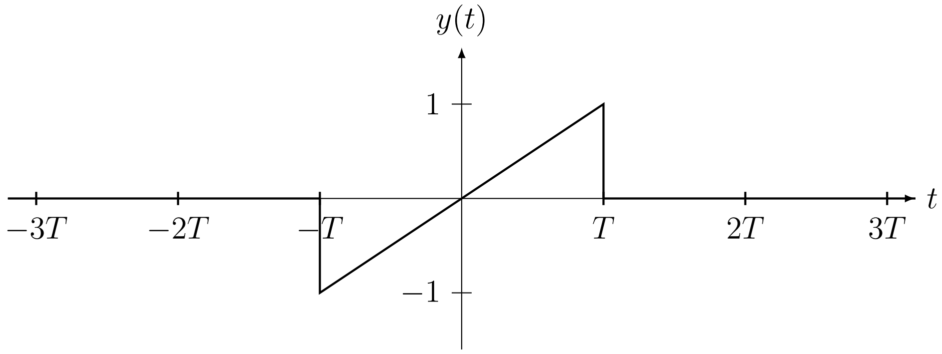
(a) (4 Punkte) Geben Sie eine Bedingung an die Koeffizienten $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, an, sodass $x(t)$ für *jede beliebige* Funktion $y(t)$ T-periodisch ist, d.h. $x(t)$ erfüllt die Identität

$$x(t + T) = x(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nehmen Sie für den Rest der Aufgabe an, dass

$$\alpha_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

und $y(t)$ folgende Form hat:



(b) (3 Punkte) Zeichnen Sie das Signal $x(t)$ in (2) im Bereich $-3T \le t \le 3T$.

(c) (7 Punkte) Betrachten Sie nun das transformierte Signal

$$z(t) = \max\{0, x(t)\}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Bestimmen Sie die Periode von $z(t)$ sowie die korrespondierenden Fourierreihenkoeffizienten $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

(d) (4 Punkte) Berechnen Sie die Signalenergie

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

von $z(t)$ in (3) und bestimmen Sie den Wert des folgenden Grenzwertes:

$$G = \lim_{|k| \to \infty} c_k.$$

(e) (6 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe der Fourierreihenkoeffizienten $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ von $z(t)$ in (3) und der *Parsevalschen Beziehung für periodische Signale* (siehe Formelsammlung) folgende Identität:

$$\sum_{k\in I} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{8},$$

wobei $I := \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ ungerade}\}$.

3. **Aufgabe** (25 Punkte) Betrachten Sie für die Teilaufgaben (a), (b) und (c) das zeitdiskrete LTI-System H_1 mit Frequenzgang

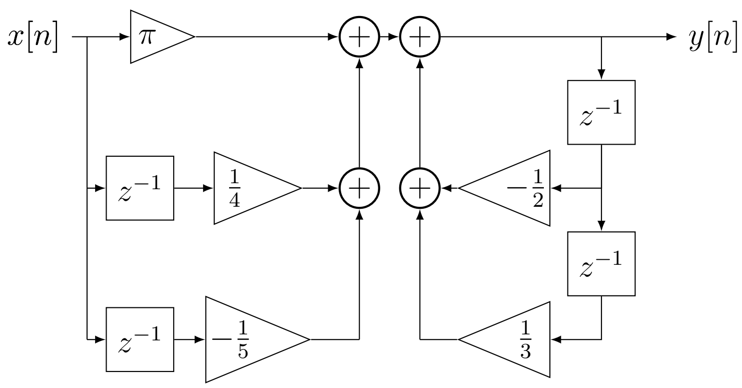
$$\widehat{h}_1(\theta) = \frac{63}{9 - \frac{5}{2}e^{-2\pi i\theta} - \frac{1}{6}e^{-4\pi i\theta}}.$$

(a) (7 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_1[n]$ von H_1.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die zu H_1 gehörige Differenzengleichung.

(c) (3 Punkte) Zeichnen Sie das zu H_1 gehörige Blockschaltbild.

Betrachten Sie für die folgende Teilaufgabe (d) das zeitdiskrete LTI-System H_2 mit folgendem Blockschaltbild:



(d) (5 Punkte) Bestimmen Sie den Frequenzgang $\widehat{h}_2(\theta)$ des LTI-Systems H_2.

(e) (4 Punkte) Für ein Semesterprojekt benötigen Sie zwei LTI-Systeme H_3 und H_4. Das System H_3 soll BIBO-stabil und kausal sein; H_4 soll hingegen BIBO-stabil und *nicht* kausal sein. Geben Sie jeweils ein Beispiel für H_3 und H_4 an und begründen Sie Ihre Auswahl.

(f) (3 Punkte) Bestimmen Sie, ob das System

$$(H_5 x)[n] = \left|x[n]\right|^2, \quad n \in \mathbb{Z},$$

linear ist.

4. **Aufgabe** (25 Punkte)

Im ersten Teil dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit folgender Eigenschaft der diskreten Fouriertransformation (DFT): Das Ändern einer einzigen Komponente des N-Punkt Signals $x[n]$, $n \in \{0, \dots, N-1\}$, beeinflusst jede Komponente der korrespondierenden DFT. Konkret sei $x[n]$, $n \in \{0, \dots, N-1\}$, ein allgemeines N-Punkt Signal mit zugehöriger DFT $\hat{x}[k]$, $k \in \{0, \dots, N-1\}$. Es sei $\varepsilon \in \mathbb{C}$ und $l \in \{0, \dots, N-1\}$. Ferner sei das N-Punkt Signal $y[n]$, $n \in \{0, \dots, N-1\}$, gegeben durch

$$y[n] := \begin{cases} x[n] + \varepsilon, & \text{wenn } n = l, \\ x[n], & \text{wenn } n \in \{0, \dots, l-1, l+1, \dots, N-1\}. \end{cases}$$

(a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass jede Frequenzkomponente $\hat{y}[k]$, $k \in \{0, \dots, N-1\}$, des Signals $y[n]$, $n \in \{0, \dots, N-1\}$, durch ε in folgender Form beeinflusst wird:

$$\hat{y}[k] = \hat{x}[k] + \varepsilon e^{-2\pi i l k/N}, \quad k \in \{0, \dots, N-1\}.$$

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für den Euklidischen Abstand zwischen $\hat{x} \in \mathbb{C}^N$ und $\hat{y} \in \mathbb{C}^N$ (d.h. der durch ε induzierte Fehler) gilt:

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} \left| \hat{x}[k] - \hat{y}[k] \right|^2} = |\varepsilon| \sqrt{N}.$$

Im zweiten Teil dieser Aufgabe wollen wir die DFT eines replizierten N-Punkt Signals bestimmen. Dazu sei $x[n]$, $n \in \{0, \dots, N-1\}$, ein allgemeines N-Punkt Signal mit zugehöriger DFT $\hat{x}[k]$, $k \in \{0, \dots, N-1\}$. Das $2N$-Punkt Signal $y[n]$, $n \in \{0, \dots, 2N-1\}$, sei gegeben durch

$$y[n] := \begin{cases} x[n], & \text{wenn } n \in \{0, \dots, N-1\}, \\ x[n-N], & \text{wenn } n \in \{N, \dots, 2N-1\}. \end{cases}$$

(c) (9 Punkte) Bestimmen Sie die $2N$-Punkt DFT $\hat{y}[k]$, $k \in \{0, \dots, 2N-1\}$, von $y[n]$, $n \in \{0, \dots, 2N-1\}$, in Abhängigkeit der N-Punkt DFT $\widehat{x}[k]$, $k \in \{0, \dots, N-1\}$.

Im letzten Teil dieser Aufgabe wollen wir die DFT eines alternierenden N-Punkt Signals bestimmen. Dazu sei N gerade und $x[n]$, $n \in \{0, \dots, N-1\}$, ein allgemeines N-Punkt Signal der Form

$$x[n] := \begin{cases} p, & \text{wenn } n \text{ gerade}, \\ q, & \text{wenn } n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

wobei $p, q \in \mathbb{C}$.

(d) (9 Punkte) Bestimmen Sie die N-Punkt DFT $\hat{x}[k]$, $k \in \{0, \ldots, N-1\}$, von $x[n]$, $n \in \{0, \ldots, N-1\}$.