Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Lösung zur
Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
17. August 2018

1. **Aufgabe**

(a) Die Fouriertransformierte $\widehat{\phi}(f)$ kann geschrieben werden als

$$\widehat{\phi}(f) = \widehat{d}(f) + \widehat{r}\Big(f - \frac{5}{2}f_0\Big),$$

wobei $\widehat{d}(f)$ als Summe von zwei Dreieckssignalen dargestellt werden kann:

$$\widehat{d}(f) = \widehat{d}_1(f) + \widehat{d}_1(f - f_0),$$

mit

$$\widehat{d}_1(f) = \begin{cases} 1 - \frac{|f|}{f_0}, & |f| \leq f_0, \\ 0, & |f| > f_0. \end{cases}$$

Das Signal $\widehat{r}(f)$ ist ein Rechteckssignal der Form

$$\widehat{r}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq \frac{1}{2}f_0, \\ 0, & |f| > \frac{1}{2}f_0. \end{cases}$$

Für das Dreieckssignal $d_1(t)$ folgt mit der Formelsammlung (Gleichung Nr. 29) und unter Verwendung der Dualität der Fouriertransformation

$$\widehat{x}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad x(-f)\,,$$

dass

$$d_1(t) = \frac{\sin^2(-\pi f_0 t)}{\pi^2(-t)^2 f_0} = \frac{\sin^2(\pi f_0 t)}{\pi^2 t^2 f_0}.$$

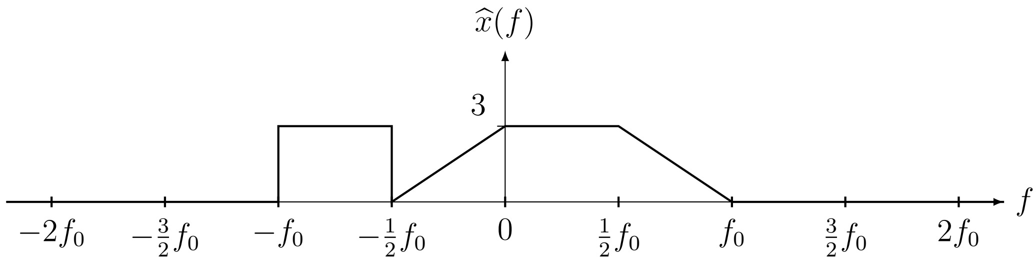
Die Fourierrücktransformierte von $\hat{r}(f)$ folgt direkt aus der Formelsammlung (Gleichung Nr. 27):

$$r(t) = \frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi t}.$$

Schliesslich erhalten wir mit der Frequenzverschiebungseigenschaft der Fouriertransformation (siehe Formelsammlung, Gleichung Nr. 3)

$$\phi(t) = (1 + e^{2\pi i f_0 t})\frac{\sin^2(\pi f_0 t)}{\pi^2 t^2 f_0} + e^{5\pi i f_0 t}\frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi t}.$$

(b) Es ergibt sich folgendes Schaubild:



(c) Aus der Vorlesung wissen wir (siehe Kapitel 7 im Skriptum, Abtasttheorem), dass kein Aliasing entsteht, falls

$$\frac{1}{T} \geq 2f_g,$$

gilt, wobei f_g die Bandbreite des abgetasteten Signals ist. Aus Teilaufgabe (b) ist ersichtlich, dass $x(t)$ Bandbreite $f_g = f_0$ hat. Somit ist die die grösstmögliche Abtastperiode $T = \frac{1}{2f_0}$.

(d) Aus der Vorlesung ist bekannt (siehe Gleichung (79) im Skriptum), dass ein LTI-System genau dann kausal ist, wenn die korrespondierende Impulsantwort $h(t)$ folgende Bedingung erfüllt:

$$h(t) = 0, \quad \forall\, t < 0.$$

Die Fourierrücktransformierte von $\widehat{h}_{\text{TP}}(f)$ lässt sich nun mit Hilfe der Formelsammlung (Gleichung Nr. 3 und Nr. 27) ermitteln:

$$h_{\text{TP}}(t) = e^{6\pi i f_0 t} \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{\pi t}.$$

Für $t^* = -\frac{1}{4f_0} < 0$ haben wir

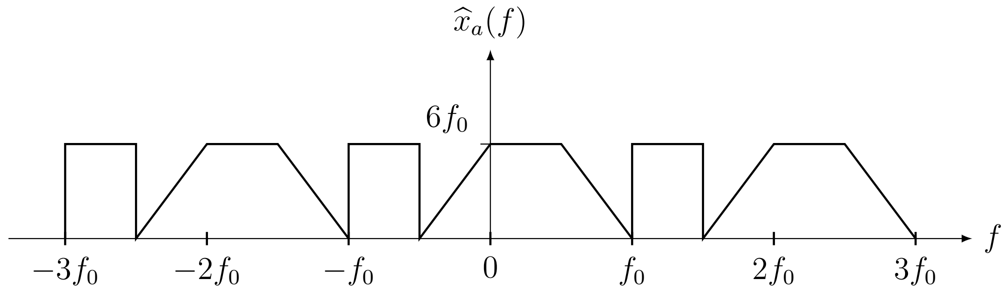
$$h_{\text{TP}}(t^*) = i\frac{4f_0}{\pi} \neq 0,$$

sodass das LTI-System nicht kausal sein kann.

(e) Für $T = 1/(2f_0)$ ist die Fouriertransformierte $\widehat{x}_a(f)$ des abgetasteten Signals $x_a(t)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \widehat{x}_a(f) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right) \\ &= 2f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(f - 2f_0 k)\,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich folgender Verlauf von $\widehat{x}_a(f)$ im Intervall $-3f_0 \leq f \leq 3f_0$:



(f) Die Fouriertransformierte $\widehat{x}_a(f)$ muss zuerst um f_0 nach rechts verschoben werden, d.h. $\widehat{x}_a(f-f_0)$. Danach werden alle Kopien von $2f_0\,\widehat{x}(f-f_0-2f_0k)$ für $k\neq 1$ herausgefiltert, und schliesslich wird die verbleibende Kopie $2f_0\,\widehat{x}(f-3f_0)$ (d.h. diejenige für $k=1$) um $3f_0$ zurück nach links verschoben und deren Amplitude mit $\frac{1}{2f_0}$ skaliert.
Um das zu erreichen setzen wir

$$u(t)=e^{2\pi i f_0 t}.$$

Da somit $x_1(t)=x_a(t)e^{2\pi i f_0 t}$ gilt, ergibt sich mit der Frequenzverschiebungseigenschaft der Fouriertransformation (siehe Formelsammlung Gleichung Nr. 3) die Fouriertransformierte $\widehat{x}_1(f)$ von $x_1(t)$ als

$$\widehat{x}_1(f)=\widehat{x}_a(f-f_0).$$

Die Fouriertransformierte $\widehat{x}_2(f)$ von $x_2(t)$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\widehat{x}_2(f)&=\widehat{h}(f)\widehat{x}_1(f)\\&=\widehat{h}(f)\widehat{x}_a(f-f_0).\end{aligned}$$

Es werden somit alle Kopien $2f_0\,\widehat{x}(f-f_0-2f_0k)$ für $k\neq 1$ herausgefiltert und es verbleibt lediglich die Kopie $2f_0\,\widehat{x}(f-3f_0)$ (das heisst diejenige für $k=1$). Somit erhalten wir

$$\widehat{x}_2(f)=2f_0\,\widehat{x}(f-3f_0).$$

Setzen wir nun

$$v(t)=\frac{1}{2f_0}e^{-6\pi i f_0 t},$$

so ergibt sich die Fouriertransformierte $\widehat{y}(f)$ von $y(t)$ (durch erneute Anwendung der Frequenzverschiebungseigenschaft der Fouriertransformation, siehe Formelsammlung Gleichung Nr. 3) als

$$\begin{aligned}\widehat{y}(f)&=\widehat{x}_2(f-f_0)\\&=\widehat{x}(f).\end{aligned}$$

Damit gilt $y(t)=x(t)$.

2. **Aufgabe**

(a) Es gilt

$$x(t+T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \, y((t+T) - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \, y(t-(n-1)T)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{k+1} \, y(t-kT),$$

wobei wir die Indexsubstitution $k = n-1$ benutzt haben. Ferner haben wir, nach Voraussetzung,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \, y(t-kT).$$

Mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs ist es nun ersichtlich ist, dass

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass für jedes beliebige $y(t)$ die Identität

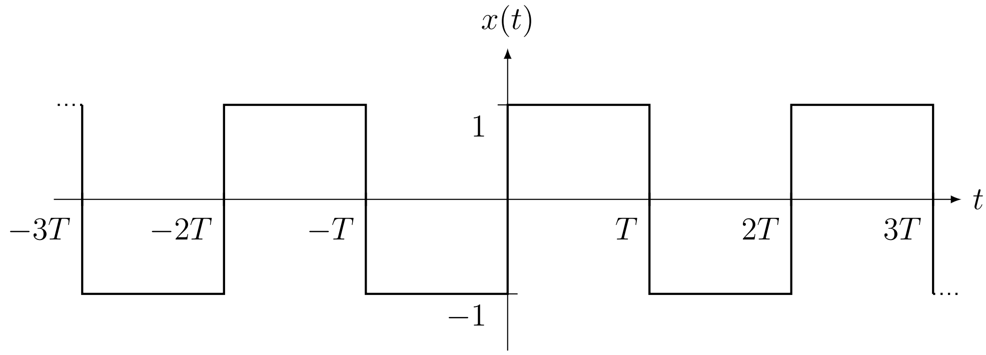
$$x(t+T) = x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

gilt. Schliesslich bemerken wir, dass (1) bedeutet, dass die Koeffizienten konstant in k sind, d.h.

$$\alpha_k = \gamma, \quad k \in \mathbb{Z},$$

für ein $\gamma \in \mathbb{R}$.

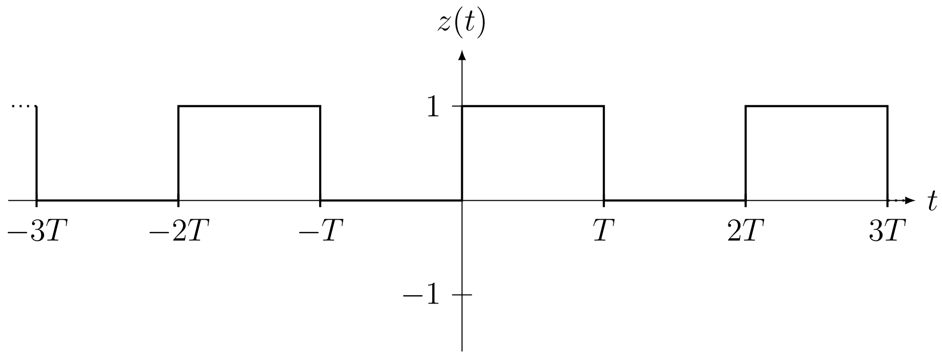
(b) Es ergibt sich folgendes Schaubild:



(c) Die Nicht-linearität

$$z(t) = \max\{0, x(t)\}$$

setzt die negativen Werte des Signals $x(t)$ zu Null. Somit hat $z(t)$ folgendes Schaubild:



Aus dem Schaubild ist ersichtlich, dass $z(t)$ $2T$-periodisch ist. Für die Berechnung der Fourierreihenkoeffizienten von $z(t)$ erhalten wir für $k = 0$

$$c_0 = \frac{1}{2T}\int_0^{2T} z(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2T}\int_0^T 1\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Für $k \neq 0$ haben wir

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2T}\int_0^{2T} z(t)e^{-2\pi ikt/(2T)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2T}\int_0^T e^{-2\pi ikt/(2T)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2T}\left[\frac{-2T}{2\pi ik}e^{-2\pi ikt/(2T)}\right]_{t=0}^{t=T} = \frac{1}{2\pi ik}(1 - e^{-\pi ik}) \\ &= \frac{1}{2\pi ik}(1 - (-1)^k). \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{wenn } k = 0, \\ \frac{1}{\pi ik}, & \text{wenn } k \text{ ungerade}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2}$$

(d) Mit Hilfe der Parsevalschen Beziehung fuer periodische Signale berechnen wir die Energie von $z(t)$ gemäss

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2T}\int_0^{2T} |z(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2T}\int_0^T 1\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Ferner gilt

$$\lim_{|k|\to\infty} \frac{1}{\pi ik} = 0,$$

sodass wir mit Hilfe von (2) schlussfolgern können:

$$G = \lim_{|k|\to\infty} c_k = 0.$$

(e) Mit Hilfe von Teilaufgabe (d) wissen wir, dass

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2}.$$

Mit Hilfe von (2) ergibt sich nun

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = |c_0|^2 + \sum_{k \text{ ungerade}} |c_k|^2 \\ = \frac{1}{4} + \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{1}{\pi^2 k^2} \\ = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k \in I} \frac{1}{k^2},\end{aligned}$$

wobei $I = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ ungerade}\}$. Umformen des letzten Ausdrucks ergibt nun die gewünschte Identität

$$\sum_{k \in I} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. **Aufgabe**

(a) Durch Faktorisieren des Nenners von $\hat{h}_1(\theta)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{h}_1(\theta) &= \frac{63}{9 - \frac{5}{2}e^{-2\pi i\theta} - \frac{1}{6}e^{-4\pi i\theta}} \\ &= \frac{7}{1 - \frac{5}{18}e^{-2\pi i\theta} - \frac{1}{54}e^{-4\pi i\theta}} \\ &= \frac{7}{(1 - \frac{1}{3}e^{-2\pi i\theta})(1 + \frac{1}{18}e^{-2\pi i\theta})}.\end{aligned}$$

Wir führen nun Partialbruchzerlegung gemäss

$$\begin{aligned}\hat{h}_1(\theta) &= \frac{A}{1 - \frac{1}{3}e^{-2\pi i\theta}} + \frac{B}{1 + \frac{1}{18}e^{-2\pi i\theta}} \\ &= \frac{A(1 + \frac{1}{18}e^{-2\pi i\theta}) + B(1 - \frac{1}{3}e^{-2\pi i\theta})}{(1 - \frac{1}{3}e^{-2\pi i\theta})(1 + \frac{1}{18}e^{-2\pi i\theta})}\end{aligned}$$

durch. Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned}&A + B = 7, \qquad \text{und} \qquad \frac{A}{18} - \frac{B}{3} = 0 \\ &\implies A = 6B \\ &\implies 6B + B = 7 \\ &\implies B = 1, A = 6\end{aligned}$$

und damit

$$\hat{h}_1(\theta) = \frac{6}{1 - \frac{1}{3}e^{-2\pi i\theta}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{18}e^{-2\pi i\theta}}.$$

Mittels Formelsammlung (Gleichung Nr. 73) erhalten wir die Impulsantwort

$$h_1[n] = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n \sigma[n] + \left(-\frac{1}{18}\right)^n \sigma[n].$$

(b) Aus der Definition des Frequenzgangs von H_1

$$\hat{h}_1(\theta) = \frac{\hat{y}(\theta)}{\hat{x}(\theta)} = \frac{63}{9 - \frac{5}{2}e^{-2\pi i\theta} - \frac{1}{6}e^{-4\pi i\theta}}$$

folgt

$$63\hat{x}(\theta) = 9\hat{y}(\theta) - \frac{5}{2}e^{-2\pi i\theta}\hat{y}(\theta) - \frac{1}{6}e^{-4\pi i\theta}\hat{y}(\theta).$$

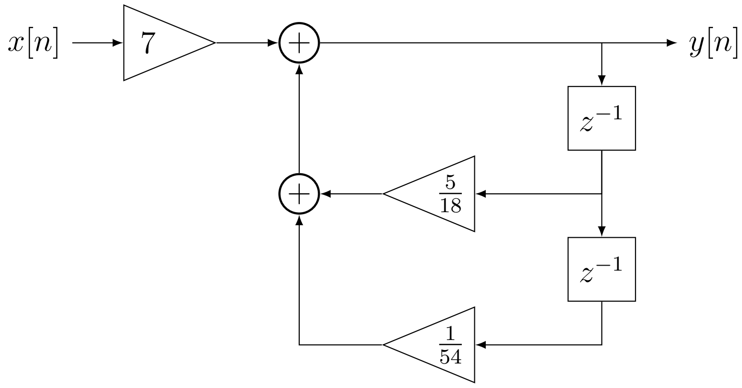
Mittels Formelsammlung (Gleichung Nr. 55) erhalten wir die Differenzengleichung

$$63x[n] = 9y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2].$$

Durch Umformen ergibt sich die Differenzengleichung

$$y[n] = 7x[n] + \frac{5}{18}y[n-1] + \frac{1}{54}y[n-2].$$

(c) Das Blockschaltbild lässt sich aus der Differenzengleichung ermitteln.



(d) Aus dem Blockschaltbild erhalten wir folgende Differenzengleichung

$$\pi x[n] + \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{5}x[n-1] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{3}y[n-2] = y[n],$$

welche umgeformt

$$\pi x[n] + \frac{1}{20}x[n-1] = y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{3}y[n-2]$$

ergibt. Nun erhalten wir unter Verwendung der Formelsammlung (Gleichung Nr. 55)

$$\widehat{x}(\theta)\Big(\pi + \frac{1}{20}e^{-2\pi i\theta}\Big) = \widehat{y}(\theta)\Big(1 + \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta} - \frac{1}{3}e^{-4\pi i\theta}\Big).$$

Da H_2 ein LTI-System ist, gilt

$$\frac{\widehat{y}(\theta)}{\widehat{x}(\theta)} = \widehat{h}_2(\theta),$$

sodass wir folgenden Frequenzgang erhalten:

$$\widehat{h}_2(\theta) = \frac{\pi + \frac{1}{20}e^{-2\pi i\theta}}{1 + \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta} - \frac{1}{3}e^{-4\pi i\theta}}.$$

(e) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass LTI-Systeme durch Faltungen beschrieben werden. Für die Lösung der Aufgabe sind somit zwei Impulsantworten $h_3[n]$ und $h_4[n]$ für die Systeme

$$(H_3x)[n] = (x * h_3)[n], \quad n \in \mathbb{Z},$$

und

$$(H_4x)[n] = (x * h_4)[n], \quad n \in \mathbb{Z},$$

gesucht, die die jeweiligen BIBO-Stabilitäts- und Kausalitätseigenschaften erfüllen. Hierbei verwenden wir folgende beiden Charakterisierungen (siehe Kapitel 8 im Skriptum):

- Wenn $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$, dann ist das zeitdiskrete LTI-System BIBO-stabil.
- Ein zeitdiskretes LTI-System ist kausal dann und nur dann, wenn $h[n] = 0$, für alle $n < 0$.

Setzen wir nun

$$h_3[n] = \delta[n], \quad n \in \mathbb{Z},$$

und

$$h_4[n] = \delta[n+1], \quad n \in \mathbb{Z},$$

ist ersichtlich, dass beide Systeme H_3 und H_4 BIBO-stabil sind, da

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_3[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_4[n]| = 1 < \infty$$

gilt. Ferner sehen wir, dass $h_3[n] = 0$, für alle $n < 0$, (H_3 ist somit kausal) jedoch $h_4[-1] = \delta[0] = 1 \neq 0$ gilt (H_4 ist somit *nicht* kausal).

(f) Falls H_5 linear wäre, würde es folgende Eigenschaft erfüllen:

$$(H_5 \alpha x)[n] = \alpha(H_5 x)[n], \quad n \in \mathbb{Z},$$

für alle zeitdiskreten Signale $x[n]$ und alle komplexen Zahlen $\alpha \in \mathbb{C}$. Wenn wir nun $x[n] = 1$, $n \in \mathbb{Z}$, und $\alpha = -1$ setzen, sehen wir, dass

$$(H_5 \alpha x)[n] = |-x[n]|^2 = 1 \neq -1 = -|x[n]|^2 = \alpha(H_5 x)[n], \quad n \in \mathbb{Z},$$

gilt. Somit folgt, dass das System H_5 nicht-linear ist.

4. **Aufgabe**

(a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\hat{y}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-2\pi i n k/N} \\
&= \sum_{n=0}^{l-1} y[n] e^{-2\pi i n k/N} + y[l] e^{-2\pi i l k/N} + \sum_{n=l+1}^{N-1} y[n] e^{-2\pi i n k/N} \\
&= \sum_{n=0}^{l-1} x[n] e^{-2\pi i n k/N} + (x[l]+\varepsilon) e^{-2\pi i l k/N} + \sum_{n=l+1}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i n k/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i n k/N} + \varepsilon e^{-2\pi i l k/N} = \hat{x}[k] + \varepsilon e^{-2\pi i l k/N}, \quad k \in \{0, \ldots, N-1\},
\end{aligned}
$$

was die gewünschte Identität beweist.

(b) Mit Hilfe des Ergebnisses aus Teilaufgabe (a), d.h.

$$
\hat{y}[k] = \hat{x}[k] + \varepsilon e^{-2\pi i l k/N}, \quad k \in \{0, \ldots, N-1\},
$$

ergibt sich die gewünschte Identität durch direktes einsetzen:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} \left| \hat{x}[k] - \hat{y}[k] \right|^2} &= \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} \left| \hat{x}[k] - (\hat{x}[k] + \varepsilon e^{-2\pi i l k/N}) \right|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} |\varepsilon|^2 \underbrace{\left| e^{-2\pi i l k/N} \right|^2}_{=1}} \\
&= \sqrt{|\varepsilon|^2 \sum_{k=0}^{N-1} 1} = |\varepsilon| \sqrt{N}.
\end{aligned}
$$

(c) Wir berechnen die $2N$-Punkt DFT $\hat{y}[k]$, $k \in \{0, \ldots, 2N-1\}$, von $y[n]$, $n \in \{0, \ldots, 2N-1\}$, zunächst an den geraden Stellen, wobei wir die aus der Vorlesung bekannte Notation $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$ verwenden:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}[2k] = \sum_{n=0}^{2N-1} y[n] \omega_{2N}^{2kn} &= \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \omega_{2N}^{2kn} + \sum_{n=0}^{N-1} y[n+N] \omega_{2N}^{2k(n+N)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \omega_{2N}^{2kn} + \omega_{2N}^{2kN} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \omega_{2N}^{2kn}, \qquad (3)
\end{aligned}
$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition von $y[n]$ benutzt haben. Nun bemerken wir, dass

$$
\omega_{2N}^{2kn} = e^{-2\pi i (2kn)/(2N)} = e^{-2\pi i (kn)/(N)} = \omega_N^{kn}
$$

und

$$
\omega_{2N}^{2kN} = e^{-2\pi i (2kN)/(2N)} = e^{-2\pi i k} = 1
$$

gilt, sodass (3) zu folgender Identität führt:

$$\hat{y}[2k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn} = 2\hat{x}[k], \quad k \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

Für die ungeraden Stellen ergibt sich analog

$$\begin{aligned}\hat{y}[2k+1] &= \sum_{n=0}^{2N-1} y[n]\omega_{2N}^{(2k+1)n} = \sum_{n=0}^{N-1} y[n]\omega_{2N}^{(2k+1)n} + \sum_{n=0}^{N-1} y[n+N]\omega_{2N}^{(2k+1)(n+N)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_{2N}^{(2k+1)n} + \omega_{2N}^{(2k+1)N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_{2N}^{(2k+1)n}.\end{aligned}$$

Nun bemerken wir, dass

$$\omega_{2N}^{(2k+1)N} = e^{-2\pi i(2k+1)N/(2N)} = e^{-\pi i(2k+1)} = -1,$$

sodass

$$\hat{y}[2k+1] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_{2N}^{(2k+1)n} - \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_{2N}^{(2k+1)n} = 0, \quad k \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

Damit erhalten wir

$$\hat{y}[k] := \begin{cases} 2\hat{x}[k/2], & \text{wenn } k \text{ gerade}, \\ 0, & \text{wenn } k \text{ ungerade}. \end{cases}$$

(d) In dieser Teilaufgabe ist die Kernidee, die DFT-Summe

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn}$$

in gerade und ungerade Stellen aufzuteilen. Hierbei verwenden wir wiederum die aus der Vorlesung bekannte Notation $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\hat{x}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn} = \sum_{n \text{ gerade}} x[n]\omega_N^{kn} + \sum_{n \text{ ungerade}} x[n]\omega_N^{kn} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]\omega_N^{k2r} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]\omega_N^{k(2r+1)} \\ &= p \sum_{r=0}^{N/2-1} (\omega_N^2)^{kr} + \omega_N^k\, q \sum_{r=0}^{N/2-1} (\omega_N^2)^{kr},\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition von $x[n]$ verwendet haben. Nun bemerken wir, dass

$$\omega_N^2 = e^{-4\pi i/N} = e^{-2\pi i/(N/2)} = \omega_{N/2}$$

ist, welches zu

$$\hat{x}[k] = p \sum_{r=0}^{N/2-1} \omega_{N/2}^{kr} + \omega_N^k\, q \sum_{r=0}^{N/2-1} \omega_{N/2}^{kr}$$

führt. Aus der Formelsammlung (Gleichung Nr. 87) erhalten wir nun, dass

$$\hat{x}[k] = \frac{pN}{2}\delta_{N/2}[k] + \omega_N^k \frac{qN}{2}\delta_{N/2}[k],$$

wobei der Einsimpuls $\delta_{N/2}$ die Periode $N/2$ besitzt. Schliesslich bemerken wir, dass

$$\omega_N^0 = e^0 = 1$$

und

$$\omega_N^{N/2} = e^{-2\pi i(N/2)/N} = e^{-\pi i} = -1,$$

gilt, sodass wir folgende Form für die DFT $\hat{x}$ von x erhalten:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \frac{N}{2}(p+q) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{N}{2}(p-q) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} \frac{N}{2} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} \frac{N}{2} \end{matrix}$$