Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
21. Januar 2019

Bitte beachten Sie:

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung ist die Formelsammlung erlaubt, die Sie von uns erhalten. Die Benutzung von Rechnern/Smartphones/Tablets jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Aufgabenteile, die mit einem ★ gekennzeichnet sind, können unabhängig von vorhergehenden Aufgabenteilen gelöst werden.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen Sie darauf hin, dass Studierende bei unehrlichem Handeln während der Prüfung den Strafnormen der Disziplinarordnung RSETHZ 361.1 der ETHZ unterstehen.

Vor der Klausur:

1. Dieses Angabenheft hat 7 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie bitte sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen ausschliesslich auf die bereitgestellten leeren Blätter. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie weitere Blätter.

Nach der Klausur:

5. Nummerieren Sie die Lösungsblätter und beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen. Tragen Sie die Anzahl der Lösungsblätter (exklusive der Aufgabenblätter), die Sie abgeben möchten, auf dieser Seite unten ein und unterschreiben Sie. Alle Aufgabenblätter müssen abgegeben werden.

Nachname: .... Vorname: ....

Legi-Nr.: ....

Anzahl abgegebener Lösungsblätter: ....

Unterschrift: ....

1. **Aufgabe** (28 Punkte)

★ (a) (13 Punkte) Es sei h_{TP} ein ideales Tiefpassfilter gemäss

$$\hat{h}_{\mathrm{TP}}(f) = \begin{cases} T, & \text{für} \quad |f| \le f_g, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit Grenzfrequenz $f_g = \frac{1}{2T}$, $T > 0$. Es sei weiter $f_g \ge f_0 \ge \frac{1}{6T}$. Das reellwertige Signal $x \in L^2(\mathbb{R})$ wird in ein Signal $y(t)$ umgewandelt gemäss

$$y(t) = (z_1 * h_{\mathrm{TP}})(t) + (z_2 * h_{\mathrm{TP}})(t),$$

wobei

$$z_1(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t), \qquad z_2(t) = ix(t)\sin(2\pi f_0 t).$$

Wir tasten $y(t)$ mit der Frequenz $f_s = 1/T$ ab um $\tilde{x}[n] = y(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, zu erhalten.

i) (3 Punkte) Ist es möglich $y(t)$ aus $\{\tilde{x}[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$ zurückzugewinnen? Falls ja, erklären Sie wie.

ii) (5 Punkte) Angenommen $x(t)$ ist bandbegrenzt, sodass $\hat{x}(f) = 0$ für alle $f \in \mathbb{R}$ mit $|f| > B$, wobei $B = 1/T - 2f_0$. Ist es möglich $x(t)$ aus $\{\tilde{x}[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$ zurückzugewinnen? Falls ja, erklären Sie wie.

iii) (5 Punkte) Wir nehmen nun an, dass $x(t)$ bandbegrenzt ist gemäss $\hat{x}(f) = 0$ für $f \notin (-B_H, -B_L) \cup (B_L, B_H)$, wobei $B_L < B_H$. Geben Sie Bedingungen an B_L und B_H an (als Funktion von f_0 und T), sodass aliasing-freie Rekonstruktion von $x(t)$ aus $y(t)$ gewährleistet werden kann.

Hinweis: Beachten Sie in Teilaufgaben ii) und iii), dass $x(t)$ reellwertig ist.

★ (b) (15 Punkte) Es sei h_{TP} ein ideales Tiefpassfilter gemäss

$$\hat{h}_{\mathrm{TP}}(f) = \begin{cases} T', & \text{für} \quad |f| \le f'_g, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit Grenzfrequenz $f'_g > 0$. Des weiteren seien $x_1, x_2 \in L^2(\mathbb{R})$ bandbegrenzte Signale, sodass $\hat{x}_1(f) = 0$ für alle $f \in \mathbb{R}$ mit $|f| > B > 0$ und $\hat{x}_2(f) = 0$ für alle $f \in \mathbb{R}$ mit $|f| > 2B$. Für $T' > 0$ seien weiter

$$z(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT') \quad \text{und} \quad y(t) = (z * h_{\mathrm{TP}})(t).$$

Geben Sie in den nächsten fünf Teilaufgaben grösstmögliche Wertebereiche für T' und f'_g als Funktion von B an, sodass $y(t) = x(t)$ gilt. Begründen Sie Ihre Antworten.

i) (3 Punkte) $x(t) = x_1(t)$

ii) (3 Punkte) $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$

iii) (3 Punkte) $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

iv) (3 Punkte) $x(t) = x_1(t)\, x_2(t)$

v) (3 Punkte) $x(t) = x_2(10t)$

2. **Aufgabe** (25 Punkte)

★ (a) (4 Punkte) Wir betrachten das zeitkontinuierliche System H, dessen Eingangs-Ausgangsbeziehung gegeben ist durch

$$y(t) = (Hx)(t) = (H_1x)(t) + (H_3H_2H_1x)(t), \tag{1}$$

wobei H_1 ein LTI-System ist mit Impulsantwort

$$h_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_1)$$

und die Eingangs-Ausgangsbeziehungen von H_2 und H_3 gegeben sind durch

$$(H_2x_2)(t) = x_2(-t) \qquad \text{und} \qquad (H_3x_3)(t) = x_3(t - T_3).$$

Bestimmen Sie $y(t)$ als Funktion von $x(t)$, T_1 und T_3.

(b) (6 Punkte) Es sei

$$x(t) = \begin{cases} t-1, & \text{für } 0 \le t < 2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Skizzieren Sie $y(t) = (Hx)(t)$, mit H gemäss Teilaufgabe (a), für folgende Werte von T_1 und T_3

i) $T_1 = 2, T_3 = 0$

ii) $T_1 = 2, T_3 = 1$

ii) $T_1 = 4, T_3 = 0$

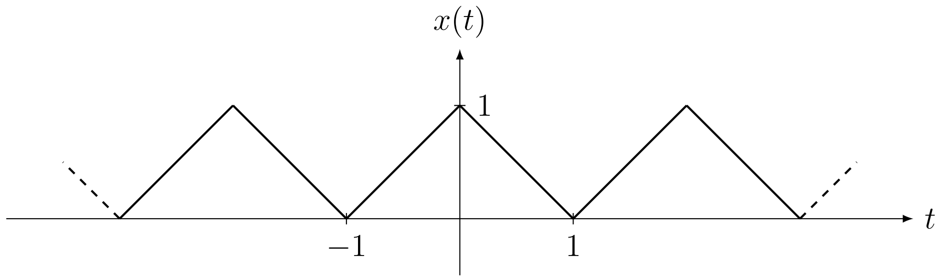
und bestimmen sie jeweils die Periode von $y(t)$.

★ (c) (8 Punkte) Bestimmen Sie die Fourierreihenkoeffizienten der folgenden periodischen Signale. Vereinfachen Sie dabei das Resultat so weit wie möglich.

i)

$$x(t) = \begin{cases} -1, & \text{für} \quad 0 \le t - 2k < 1, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

ii)



★ (d) (7 Punkte) Wir betrachten das Signal

$$z(t) = \frac{\sin^2(4\pi t)}{\pi t}.$$

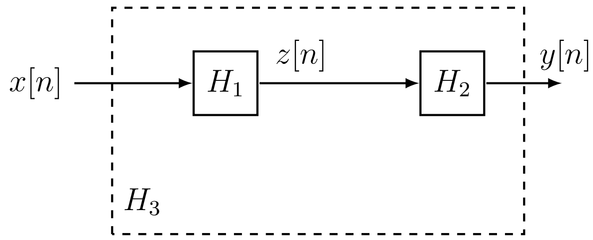
Bestimmen Sie die Energie $\int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt$ von $z(t)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Parsevalsche Beziehung.

3. **Aufgabe** (25 Punkte)

★ (a) (15 Punkte) Wir betrachten das zeitdiskrete LTI-System mit der folgenden Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$\begin{aligned} y[n-2] - 5y[n-1] + 6y[n] &= x[n], \\ z[n-1] - 3z[n] &= x[n]. \end{aligned}$$



i) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Transferfunktion $\hat{h}_3(\theta)$ von H_3.

ii) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_3[n]$ von H_3.

iii) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h_2[n]$ von H_2.

iv) (6 Punkte) Bestimmen Sie $z[n]$ für das Ausgangssignal $y[n] = \delta[n]$.

★ (b) (6 Punkte) Wir betrachten das zeitdiskrete LTI-System mit der folgenden Transferfunktion

$$\hat{h}(\theta) = \frac{e^{-2\pi i N\theta}}{1 - \frac{1}{4}e^{-2\pi i\theta}}.$$

i) (3 Punkte) Geben Sie einen Wertebereich für $N \in \mathbb{Z}$ an für den das System sicher BIBO-stabil ist.

ii) (3 Punkte) Für welche Werte von $N \in \mathbb{Z}$ ist das System kausal?

★ (c) (4 Punkte) Wir betrachten ein LTI-System das folgende Bedingung erfüllt: Für alle Eingangssignale $x[n]$ mit $x[n] = 0, n \geq 15$ ist das zugehörige Ausgangssignal $y[n] = 0$ für alle $n \geq 25$. Welche Bedingung muss die Impulsantwort $h[n]$ dieses Systems notwendigerweise erfüllen?

4. **Aufgabe** (22 Punkte) In vielen Bereichen der Signalverarbeitung, etwa dem *compressed sensing*, spielen dünn besetzte Signale (engl. *sparse signals*) endlicher Länge eine grosse Rolle. Ein dünn besetztes Signal ist ein N-Punkt Signal $(x[0], \ldots, x[N-1])$, bei dem eine grosse Anzahl der Werte $x[n]$ gleich Null ist. Die beiden Transformationspaare zur diskreten Fouriertransformation (DFT)

$$\delta[n] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1$$
$$1 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad N \cdot \delta[m]$$

deuten darauf hin, dass Signale, die im Zeit- oder Frequenzbereich dünn besetzt sind, im Allgemeinen im jeweils anderen Bereich nicht dünn besetzt sind. Die folgende Aufgabe untersucht ein spezielles N-Punkt Signal, das sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich dünn besetzt ist.

Es sei im Folgenden $N = 2KL$ für $K, L \in \mathbb{N}$. Ferner sei das N-Punkt Signal $x[n]$ gegeben durch

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^k, & \text{falls } n = kL \text{ für ein } k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2K-1\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

★ (a) (3 Punkte) Skizzieren Sie für $K = 3$ und $L = 3$ das N-Punkt Signal $x[n]$ für $n = 0, 1, \ldots, N-1$. *Achten Sie auf die Beschriftung der Achsen*!

★ (b) (10 Punkte) Berechnen Sie die expliziten Werte der DFT $\hat{x}[m]$ des N-Punkt Signals $x[n]$ für *allgemeines* $K, L \in \mathbb{N}$.

(c) (3 Punkte) Skizzieren Sie die DFT $\hat{x}[m]$ für $m = 0, 1, \ldots, N-1$ für den Fall $K = 3$ und $L = 3$. *Achten Sie auf die Beschriftung der Achsen*!

Wir nennen ein N-Punkt Signal $x[n]$ *r-dünn besetzt* (engl. *r-sparse*), wenn $x[n]$ genau an r Zeitpunkten einen von Null verschiedenen Wert annimmt.

★ (d) (3 Punkte) Wie gross ist die Dünnbesetztheit r_x des N-Punkt Signals $x[n]$ in Abhängigkeit von L und K?

(e) (3 Punkte) Wie gross ist die Dünnbesetztheit $r_{\hat{x}}$ der DFT $\hat{x}[n]$ des Signals $x[n]$ in Abhängigkeit von L und K?