ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Lösung zur
Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
21. Januar 2019

1. **Aufgabe**

(a) i) Aus der Linearität der Faltung folgt

$$y(t) = (z_1 * h_{\mathrm{TP}})(t) + (z_2 * h_{\mathrm{TP}})(t) = ((z_1 + z_2) * h_{\mathrm{TP}})(t),$$

wobei

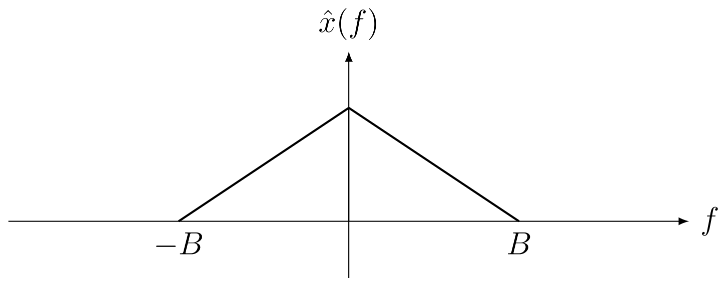
$$z(t) = z_1(t) + z_2(t) = x(t)e^{2\pi i f_0 t},$$

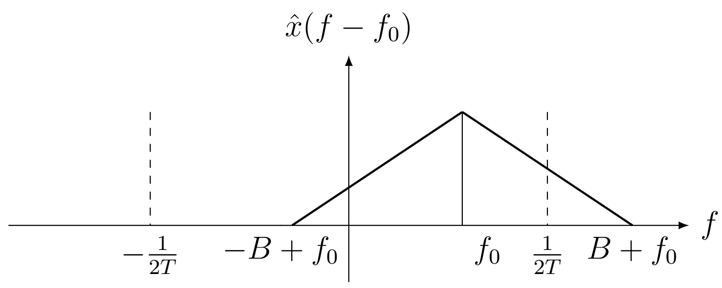
und daher

$$\hat{y}(f) = \hat{z}(f)\hat{h}_{\mathrm{TP}}(f) = \begin{cases} \hat{x}(f - f_0), & \text{für} \quad |f| \leq 1/(2T), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da das Signal $y(t)$ auf das Intervall $[-1/(2T), 1/(2T)]$ bandbegrenzt ist, kann $y(t)$ mit der Frequenz $f_s = 1/T$ abgetastet und exakt aus den Abtastwerten $\tilde{x}[n] = y(nT)$ rekonstruiert werden.

ii) Die Rückgewinnung von $y(t)$ aus $\{\tilde{x}[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$ wird in Teilaufgabe i) beschrieben. Da $x(t)$ reellwertig ist und damit $\hat{x}(f) = \hat{x}^*(-f)$ gilt, kann $x(t)$ aus $y(t)$ rückgewonnen werden, wenn mindestens eine "Hälfte" von $\hat{x}(f)$ im Durchlassbereich des Tiefpassfilters liegt (siehe Abbildung unten).





Der "linke" Teil von $\hat{x}(f-f_0)$ also $\hat{x}(f-f_0)$ für $f \in [-B+f_0, f_0]$, ist im Durchlassbereich von $\hat{h}_{\mathrm{TP}}(f)$, wenn

$$-B+f_0 \geq -\frac{1}{2T} \quad \text{und} \quad f_0 \leq \frac{1}{2T}.$$

Die erste Ungleichung ist erfüllt dank der Annahme $f_0 \geq \frac{1}{6T}$. Die zweite Ungleichung gilt, weil $f_0 \leq f_g = \frac{1}{2T}$. Um $x(t)$ aus $y(t)$ zurückzugewinnen, extrahieren wir die "linke" Hälfte des Spektrums $\hat{x}(f)$ durch Filterung von $\hat{x}(f-f_0)\hat{h}_{\mathrm{TP}}(f)$ mit einem Bandpassfilter, das den Durchlassbereich $[-B+f_0, f_0]$ hat. Die "rechte" Hälfte von $\hat{x}(f)$ erhalten wir daraus unter Verwendung von $\hat{x}(f) = \hat{x}^*(-f)$, was dank der Reellwertigkeit von $x(t)$ gilt.

iii) Da $\hat{x}(f) = 0$ für alle $f \notin (-B_H, -B_L) \cup (B_L, B_H)$ und dank $x(t) \in \mathbb{R}$ wieder nur eine "Hälfte" von $\hat{x}(f)$ rekonstruiert werden muss, folgt, dass $f_0 - \frac{1}{2T} \leq B_L < B_H \leq f_0 + \frac{1}{2T}$ hinreichend ist für perfekte Rekonstruktion.

(b) Mit Formel 20 der Formelsammlung erhalten wir

$$\hat{z}(f) = \frac{1}{T'} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\Big(f - \frac{k}{T'}\Big).$$

Durch den Faltungssatz ist $(z * h_{\mathrm{TP}})(t) = x(t)$ äquivalent zu $\hat{z}(f)\hat{h}_{\mathrm{TP}}(f) = \hat{x}(f)$. Damit $\hat{z}(f)\hat{h}_{\mathrm{TP}}(f) = \hat{x}(f)$ gilt, muss das ideale Tiefpassfilter

$$\hat{h}_{\mathrm{TP}}(f) = \begin{cases} T', & \text{falls } |f| \leq f'_g, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit $\tilde{B} \leq f'_g \leq \frac{1}{T'} - \tilde{B}$ verwendet werden, wobei $\tilde{B}$ die (einseitige) Bandbreite von $x(t)$ ist.

i) Da $x(t) = x_1(t)$ und $x_1(t)$ B-bandbegrenzt ist , folgt aus dem Abtasttheorem, dass $1/T' \geq 2B$ gelten muss. Damit erhalten wir

$$T' \leq \frac{1}{2B}.$$

Daraus folgt der Wertebereich $B \leq f'_g \leq \frac{1}{T'} - B$ für perfekte Rekonstruktion. Dank $T' \leq \frac{1}{2B}$, haben wir $\frac{1}{T'} \geq 2B$ und daher

$$\frac{1}{T'} - B \geq 2B - B = B,$$

woraus folgt, dass das Intervall $[B, \frac{1}{T} - B]$ nicht leer ist.

ii)* $\hat{x}(f) = 0$ für alle $f \in \mathbb{R}$ mit $|f| > B$. Damit erhalten wir

$$T' \leq \frac{1}{2B}, \qquad B \leq f'_g \leq \frac{1}{T'} - B.$$

iii)* $\hat{x}(f) = 0$ für alle $f \in \mathbb{R}$ mit $|f| > 2B$. Damit erhalten wir

$$T' \leq \frac{1}{4B}, \qquad 2B \leq f'_g \leq \frac{1}{T'} - 2B.$$

iv)* $\hat{x}(f) = 0$ für alle $f \in \mathbb{R}$ mit $|f| > 3B$. Damit erhalten wir

$$T' \leq \frac{1}{6B}, \qquad 3B \leq f_g' \leq \frac{1}{T'} - 3B.$$

v)* $\hat{x}(f) = 0$ für alle $f \in \mathbb{R}$ mit $|f| > 20B$. Damit erhalten wir

$$T' \leq \frac{1}{40B}, \qquad 20B \leq f_g' \leq \frac{1}{T'} - 20B.$$

$\star$ - Die Begründung folgt der in Punkt i).

2. **Aufgabe**

(a) Wir haben

$$x_2(t) = (H_1 x)(t) = (x * h_1)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT_1)$$

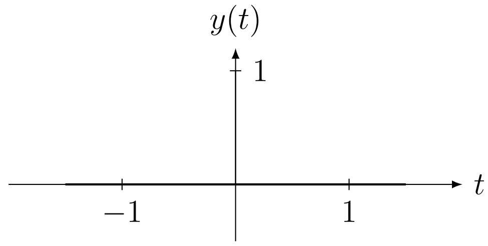
und

$$(H_3 H_2 H_1 x)(t) = (H_3 H_2 x_2)(t) = x_2(-t + T_3).$$

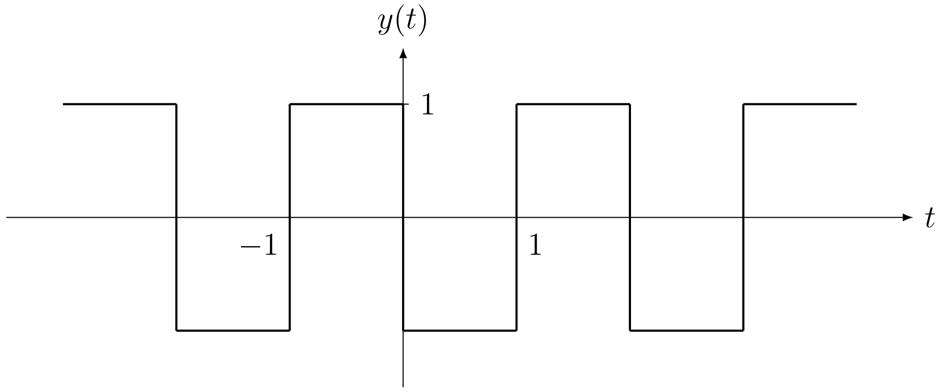
Somit gilt

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(x(t - kT_1) + x(-t + T_3 - kT_1) \Big).$$

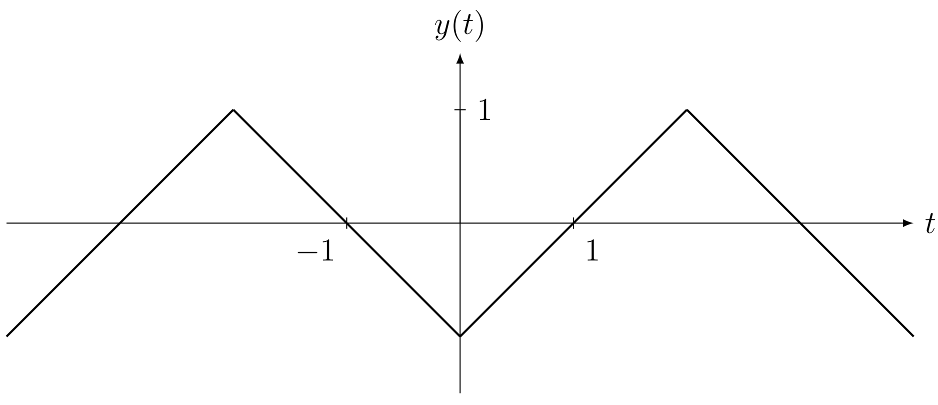
(b) i) Das Signal ist konstant $y(t) = 0$ und somit periodisch für jede Periode $T > 0$.



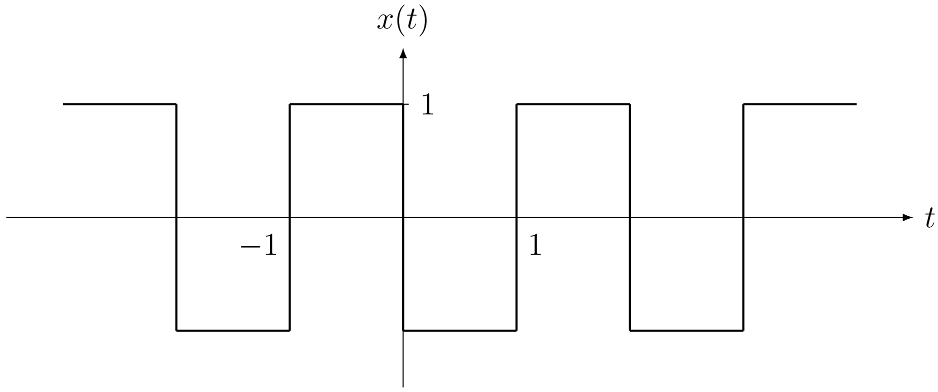
ii) Das Signal $y(t)$ hat Periode 2.



iii) Das Signal $y(t)$ hat Periode 4.



(c) i)



Das Signal hat Periode 2. Für $k = 0$ erhalten wir

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 -1dt + \frac{1}{2}\int_1^2 1dt = 0$$

und für $k \neq 0$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}\int_0^1 -e^{-\pi ikt}dt + \frac{1}{2}\int_1^2 e^{-\pi ikt}dt \\ &= \frac{e^{-\pi ikt}}{2\pi ik}\bigg|_0^1 - \frac{e^{-\pi ikt}}{2\pi ik}\bigg|_1^2 \\ &= \frac{e^{-\pi ik} - 1 - e^{-2\pi ik} + e^{-\pi ik}}{2\pi ik} \\ &= 2\frac{e^{-\pi ik} - 1}{2\pi ik} \\ &= \frac{(-1)^k - 1}{\pi ik} \end{aligned}$$

ii) $x(t)$ kann geschrieben werden als $\int_0^2 y(\tau)y(t-\tau)d\tau$ wobei $y(t)$ die 2-periodische Fortsetzung des Signals

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} 1, & \text{für} \quad |t| \leq 1/2 \\ 0, & \text{für} \quad 1/2 < |t| \leq 1 \end{cases}$$

ist. Aus der Formelsammlung entnehmen wir (Formel 52 mit $T_1 = 1/2$ und $T = 2$)

$$y(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad d_k = \tfrac{\sin(\pi k/2)}{\pi k}$$

sowie (Formel 40 mit $T = 2$ und $x(t) = y(t)$)

$$\textstyle\int_0^2 y(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Td_k^2.$$

Die Fourierreihenkoeffizienten c_k von $x(t)$ sind daher gegeben durch

$$c_k = \frac{T\sin^2(\pi k/2)}{\pi^2 k^2}.$$

(d) Wir schreiben $z(t)$ als $z(t) = z_1(t)z_2(t)$, wobei

$$z_1(t) = \sin(4\pi t) \qquad \text{und} \qquad z_2(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}.$$

Die Fouriertransformierte $\hat{z}(f)$ ist gegeben durch $\hat{z}(f) = \hat{z}_1(f) * \hat{z}_2(f)$. Unter Verwendung von Formel 19 in der Formelsammlung folgt

$$\hat{z}_1(f) = \frac{i}{2}(\delta(f+2) - \delta(f-2)),$$

und unter Verwendung von Formel 28 mit $T_0 = 2$ sowie der Dualität der Fouriertransformation

$$\hat{x}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad x(-f)\,,$$

erhalten wir

$$\hat{z}_2(f) = \begin{cases} 1, & \text{für} \quad |f| \leq 2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit folgt

$$\hat{z}(f) = \begin{cases} \frac{i}{2}, & \text{für} \quad -4 \leq f < 0 \\ -\frac{i}{2}, & \text{für} \quad 0 < f \leq 4 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das resultiert in

$$|\hat{z}(f)|^2 = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{für} \quad |f| \leq 4 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Verwendung der Parsevalschen Beziehung liefert schliesslich

$$\int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{z}(f)|^2 df = \int_{-4}^{4} \frac{1}{4} df = 2.$$

3. **Aufgabe**

(a) i) Unter Verwendung von Formel 55 der Formelsammlung folgt

$$\hat{y}(\theta)e^{-4\pi i\theta} - 5\hat{y}(\theta)e^{-2\pi i\theta} + 6\hat{y}(\theta) = \hat{x}(\theta).$$

Daher haben wir

$$\hat{h}_3(\theta) = \frac{\hat{y}(\theta)}{\hat{x}(\theta)} = \frac{1}{e^{-4\pi i\theta} - 5e^{-2\pi i\theta} + 6}.$$

ii) Partialbruchzerlegung liefert

$$\hat{h}_3(\theta) = \frac{1}{e^{-4\pi i\theta} - 5e^{-2\pi i\theta} + 6} = \frac{A}{e^{-2\pi i\theta} - 3} + \frac{B}{e^{-2\pi i\theta} - 2}.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -2A - 3B &= 1 \end{aligned}$$

woraus $A = 1$ und $B = -1$ folgt, und somit

$$\hat{h}_3(\theta) = \frac{-1/3}{1 - \frac{1}{3}e^{-2\pi i\theta}} + \frac{1/2}{1 - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta}}.$$

Berechnung der inversen Fouriertransformation von $\hat{h}_3(\theta)$ (unter Verwendung von Formel 73 der Formelsammlung) liefert

$$h_3[n] = -(1/3)^{n+1}\sigma[n] + (1/2)^{n+1}\sigma[n].$$

iii) Wir stellen fest, dass $\hat{h}_3(\theta) = \hat{h}_1(\theta)\hat{h}_2(\theta)$, wobei $\hat{h}_1(\theta)$ und $\hat{h}_2(\theta)$ die Transferfunktionen der Systeme H_1 beziehungsweise H_2 sind. Da wir $\hat{h}_3(\theta)$ kennen, können wir $\hat{h}_2(\theta)$ gemäss $\hat{h}_2(\theta) = \hat{h}_3(\theta)/\hat{h}_1(\theta)$ bestimmen. Dazu benötigen wir aber zunächst Kenntnis von $\hat{h}_1(\theta)$. Wir berechnen (unter Verwendung von Formel 55 der Formelsammlung)

$$\hat{z}(\theta)\, e^{-2\pi i\theta} - 3\hat{z}(\theta) = \hat{x}(\theta).$$

Damit erhalten wir die Transferfunktion von H_1 als

$$\hat{h}_1(\theta) = \frac{\hat{z}(\theta)}{\hat{x}(\theta)} = \frac{1}{e^{-2\pi i\theta} - 3}.$$

Damit folgt nun

$$\hat{h}_2(\theta) = \frac{\hat{h}_3(\theta)}{\hat{h}_1(\theta)} = \frac{1}{e^{-2\pi i\theta} - 2} = \frac{-1/2}{1 - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta}}.$$

Wir bestimmen nun die Impulsantwort von H_2 (unter Verwendung von Formel 73 der Formelsammlung) gemäss

$$h_2[n] = (-1/2)(1/2)^n\sigma[n] = -(1/2)^{(n+1)}\sigma[n].$$

iv) Aus Teilaufgabe iii) haben wir

$$\hat{h}_2(\theta) = \frac{\hat{y}(\theta)}{\hat{z}(\theta)} = \frac{1}{e^{-2\pi i\theta} - 2}.$$

Daraus folgt

$$e^{-2\pi i\theta}\hat{y}(\theta) - 2\hat{y}(\theta) = \hat{z}(\theta).$$

Berechnung der inversen Fouriertransformation und Anwendung von Formel 55 der Formelsammlung liefert

$$y[n-1] - 2y[n] = z[n].$$

Für $y[n] = \delta[n]$ erhalten wir daher $z[n] = \delta[n-1] - 2\delta[n]$.

(b) Die Impulsantwort des Systems ist (unter Verwendung von Formeln 55 und 73 der Formelsammlung)

$$h[n] = (1/4)^{(n-N)}\sigma[n-N].$$

Das System ist kausal wenn $h[n] = 0$ für $n < 0$. Daher ist das System kausal wenn $N \geq 0$. Eine hinreichende Bedingung für BIBO-Stabilität ist $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$. Im vorliegenden Fall gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=N}^{\infty} (1/4)^{n-N} = 4/3 < \infty.$$

Damit ist das System für alle $N \in \mathbb{Z}$ BIBO-stabil.

(c) Die Eingangs-Ausgangsbeziehung ist gegeben durch

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]x[k].$$

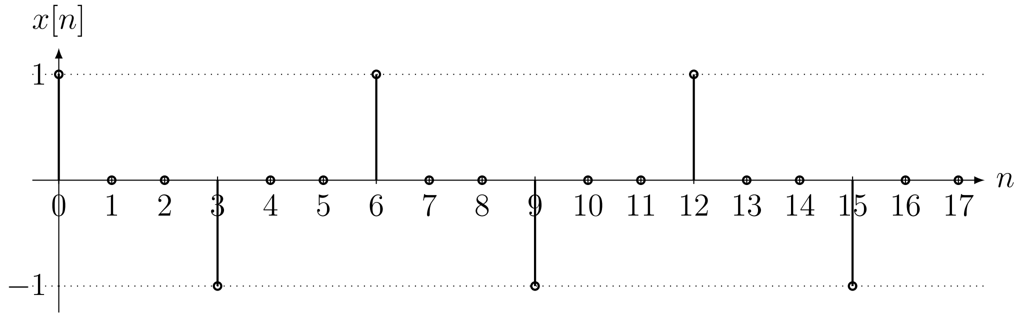
Da $x[k] = 0$ für $k \geq 15$ haben wir

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{14} h[n-k]x[k].$$

Aus $y[n] = 0$ für $n \geq 25$ und für alle $x[n]$ mit $n \geq 15$, schliessen wir, dass gelten muss: $h[n-k] = 0$ für alle $n \geq 25$ und alle $k \leq 14$. Daraus folgt nun, dass gelten muss: $h[n] = 0$ für alle $n \geq 11$.

4. **Aufgabe**

(a) Der Graph des 18-Punkt Signals $x[n]$ sieht wie folgt aus:



(b) Wir berechnen die DFT $\hat{x}[m]$ des N-Punkt Signals $x[n]$ und nutzen dabei aus, dass $x[n]$ dünn besetzt ist:

$$\begin{aligned}\hat{x}[m] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi inm/N} \\ &= \sum_{k=0}^{2K-1} x[kL]e^{-2\pi ikLm/(2KL)} \\ &= \sum_{k=0}^{2K-1} (-1)^k\, e^{-2\pi ikm/(2K)}\end{aligned}$$

für $m = 0, 1, \ldots, N-1$. Da $\hat{x}[m]$ $(2K)$-periodisch ist, reicht es, die Werte $\hat{x}[m]$ für $m = 0, 1, \ldots, 2K-1$ zu berechnen. Dazu betrachten wir zunächst das $(2K)$-Punkt Hilfssignal $y[n]$ gegeben durch

$$\begin{aligned}y[n] &= (-1)^n \\ &= e^{\frac{2\pi iKn}{2K}} \quad \text{für } n = 0, 1, \ldots, 2K-1.\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Formel 87 aus der Formelsammlung, ausgewertet für $k_0 = K$ und $N = 2K$, erhalten wir

$$\hat{y}[m] = 2K\delta[m-K] \quad \text{für } m = 0, 1, \ldots, 2K-1. \tag{1}$$

Des Weiteren folgt aus der Definition der DFT

$$\hat{y}[m] = \sum_{k=0}^{2K-1} (-1)^k\, e^{-2\pi ikm/(2K)}.$$

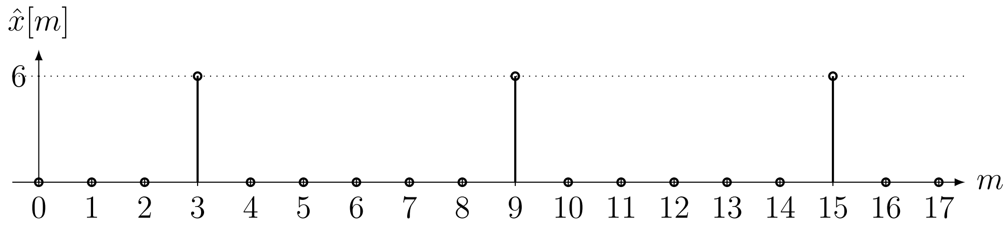
Es gilt also $\hat{x}[m] = \hat{y}[m] = 2K\delta[m-K]$ für $m = 0, 1, \ldots, 2K-1$. Unter Ausnützung der $(2K)$-Periodizität von $\hat{x}[m]$ erhalten wir schliesslich

$$\hat{x}[m] = 2K \sum_{l=0}^{L-1} \delta[m-(1+2l)K]$$

für $m = 0, 1, \ldots, N-1$. Die expliziten Werte von $\hat{x}[m]$ sind also gegeben durch:

$$\hat{x}[m] = \begin{cases} 2K, & \text{falls } m = (1+2l)K \text{ für ein } l \in \{0, 1, 2, \ldots, L-1\} \\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

(c) Der Graph der DFT $\hat{x}[m]$ sieht wie folgt aus:



(d) Das N-Punkt Signal $x[n]$ nimmt genau an $2K$ Zeitpunkten einen von Null verschiedenen Wert an. Somit ist das N-Punkt Signal $x[n]$ $(2K)$-dünn besetzt, das heisst $r_x = 2K$.

(e) Die DFT $\hat{x}[m]$ nimmt genau an L Zeitpunkten einen von Null verschiedenen Wert an. Somit ist die DFT $\hat{x}[m]$ L-dünn besetzt, das heisst $r_{\hat{x}} = L$.