Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Professur für Mathematische Informationswissenschaften
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
28. August 2019

Bitte beachten Sie:

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung ist die Formelsammlung erlaubt, die Sie von uns erhalten. Die Benutzung von Rechnern/Smartphones/Tablets jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Aufgabenteile, die mit einem ★ gekennzeichnet sind, können unabhängig von vorhergehenden Aufgabenteilen gelöst werden.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen Sie darauf hin, dass Studierende bei unehrlichem Handeln während der Prüfung den Strafnormen der Disziplinarordnung RSETHZ 361.1 der ETHZ unterstehen.

Vor der Klausur:

1. Dieses Angabenheft hat 5 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie bitte sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen ausschliesslich auf die bereitgestellten leeren Blätter. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie weitere Blätter.

Nach der Klausur:

5. Nummerieren Sie die Lösungsblätter und beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen. Tragen Sie die Anzahl der Lösungsblätter (exklusive der Aufgabenblätter), die Sie abgeben möchten, auf dieser Seite unten ein und unterschreiben Sie. Alle Aufgabenblätter müssen abgegeben werden.

Nachname: .... Vorname: ....

Legi-Nr.: ....

Anzahl abgegebener Lösungsblätter: ....

Unterschrift: ....

1. **Aufgabe** (25 Punkte)

★ (a) (13 Punkte) Es sei $x_0(t) = \frac{\sin(20\pi t)}{\pi t}$. Betrachten Sie nun das Signal

$$x(t) = (x_0 * x_0^2)(t),$$

das mit einer Frequenz von $f_s = 15\text{Hz}$ gemäss

$$g(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{f_s}\right)$$

abgetastet wird.

i. (7 Punkte) Zeichnen Sie das Spektrum des Signals $x(t)$.

ii. (6 Punkte) Bestimmen Sie das grösstmögliche f_0, sodass

$$\hat{g}(f) = 15\,\hat{x}(f) \text{ für } |f| \leq f_0,$$

gilt, wobei $\hat{x}(f)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$ ist.

★ (b) (12 Punkte) Es sei $h \in L_2(\mathbb{R})$ ein bandbegrenztes Signal, sodass $\hat{h}(f) = 0$ für alle $f \in \mathbb{R}$ mit $|f| \geq B > 0$. Drücken Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt$$

als Funktion von Abtastwerten $h(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, von $h(t)$ aus. Wie gross muss die Abtastrate mindestens sein, damit dies möglich ist?
Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $\hat{h}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt$.

2. **Aufgabe** (25 Punkte) Während die herkömmliche Fourier-Transformation die globalen spektralen Charakteristika eines Signals wiedergibt, beschreibt die Kurzzeit-Fourier-Transformation (englisch short-time Fourier transform, kurz STFT) die zeitliche Evolution des Spektrums eines Signals. Die STFT eines allgemeinen Signals $x(t)$ bezüglich der Fensterfunktion $w(t)$ ist gegeben durch

$$F_x^w(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w^*(t - \tau) e^{-2\pi i f t} \mathrm{d}t.$$

★ (a) (7 Punkte) Berechnen Sie für eine allgemeine Fensterfunktion $w(t)$ die STFT des Signals

$$y(t) = x(t - t_0) \cos(2\pi f_0 t)$$

in Abhängigkeit von $F_x^w(\tau, f)$.

★ (b) (9 Punkte) Ziel dieser Teilaufgabe ist es das Signal $x(t)$ aus der STFT $F_x^w(\tau, f)$ zurückzugewinnen. Dazu betrachten wir eine zweite allgemeine Fensterfunktion $v(t)$ und setzen

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_x^w(\tau, f) v(t - \tau) e^{2\pi i f t} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}f.$$

Welche Bedingung müssen $w(t)$ und $v(t)$ erfüllen, damit $y(t) = x(t)$ gilt?

★ (c) (9 Punkte) Das Spektrogramm des Signals $x(t)$ bezüglich der Fensterfunktion $w(t)$ is

$$S_x^w(\tau, f) = |F_x^w(\tau, f)|^2.$$

Berechnen Sie die Energie

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x^w(\tau, f) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}f$$

des Spektrogramms in Abhängigkeit von $\|x\|$ und $\|w\|$ für allgemeines $x(t)$ und allgemeine Fensterfunktion $w(t)$, wobei

$$\|x\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t} \qquad \text{und} \qquad \|w\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 \mathrm{d}t}.$$

3. **Aufgabe** (25 Punkte)

★ (a) (14 Punkte) Wir betrachten das zeitdiskrete kausale LTI- System mit der folgenden Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$y[n] = ax[n] - by[n-2],$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$.

i. (5 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h[n]$ des Systems.
ii. (4 Punkte) Für welche Werte von a, b ist das System gedächtnisbehaftet?
iii. (5 Punkte) Für welche Werte von a, b ist das System BIBO-stabil?

★ (b) (11 Punkte) Wir betrachten nun das zeitdiskrete System mit der folgenden Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$y[n] = cny[n-1] + x[n].$$

i. (7 Punkte) Zeigen Sie, dass dieses System für alle $c \in \mathbb{R}$ linear ist.
Hinweis: Die Linearität des Systems kann durch vollständige Induktion über die Zeitvariable n bewiesen werden.
ii. (4 Punkte) Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ ist das System zeitinvariant?

4. **Aufgabe** (25 Punkte)

★ (a) (8 Punkte) Es seien $x[n]$ und $y[n]$ reellwertige N-periodische Signale mit zugehörigen N-Punkt DFTs $\hat{x}[k]$ und $\hat{y}[k]$, wobei $N \geq 1$. Wir betrachten das Signal

$$c[n] = x[n-2] + i \sum_{m=0}^{N-1} y[m] \cos\left(\frac{2\pi}{N}(n-m)\right), n \in \mathbb{Z}.$$

Bestimmen Sie $\hat{x}[1]$ und $\hat{y}[1]$ in Abhängigkeit der N-Punkt DFT $\hat{c}[k]$ des Signals $c[n]$.

★ (b) (7 Punkte) Wir betrachten nun das folgende Signal

$$x[n] = 20\left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)^2.$$

i. (5 Punkte) Bestimmen Sie die 8-Punkt DFT dieses Signals.

Hinweis: Benutzen Sie die trigonometrische Identität $\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$.

ii. (2 Punkte) Bestimmen Sie die zeitdiskrete Fourier Transformation

$$\hat{x}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-2\pi i n\theta}$$

des Signals $x[n]$.

★ (c) (10 Punkte) Es seien $x[n]$ und $y[n]$ N-periodische Signale. *Die N-periodische Kreuzkorrelation* der Signale $x[n]$ und $y[n]$ ist definiert als

$$r_{xy}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y^*[m-n].$$

Zeigen Sie, dass $r_{xy}[n]$ N-periodisch ist. Drücken Sie die N-Punkt DFT $\hat{r}_{xy}[k]$ von $r_{xy}[n]$ als Funktion von $\hat{x}[k]$ und $\hat{y}[k]$ aus.