Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Professur für Mathematische Informationswissenschaften
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Lösung zur
Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
28. August 2019

1. **Aufgabe**

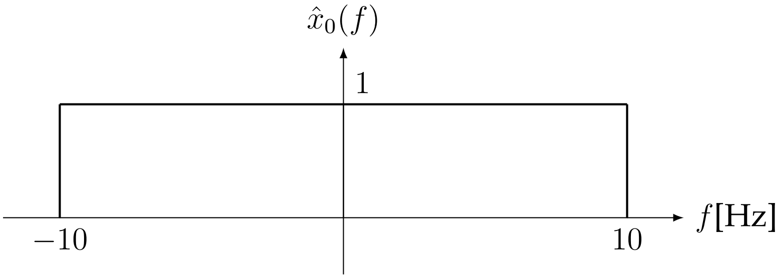
(a) i. Es gilt

$$x(t) = (x_0 * x_0^2)(t),$$

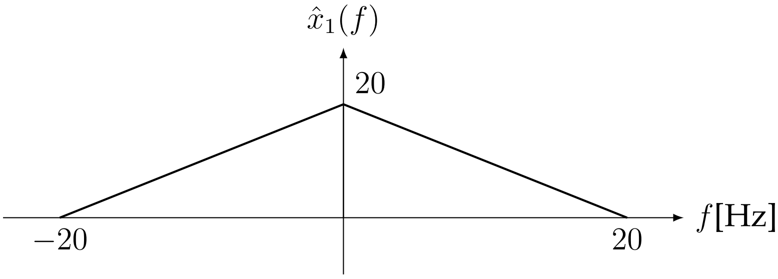
wobei

$$x_0(t) = \frac{\sin(20\pi t)}{\pi t}.$$

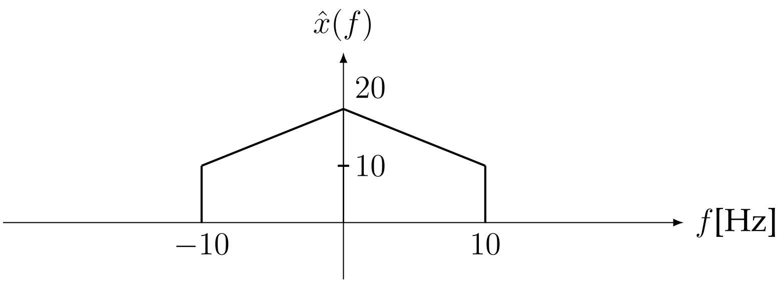
Das Spektrum des Signals $x_0(t)$ ist gegeben durch (s. Gleichung Nr. 27 in der Formelsammlung)



Das Spektrum des Signals $x_1(t) = x_0^2(t)$ ist nach dem Faltungstheorem gegeben durch $\hat{x}_1(f) = (\hat{x}_0 * \hat{x}_0)(f)$ als



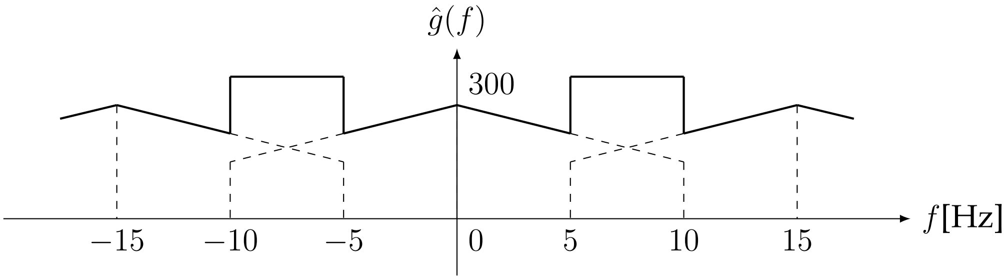
Damit ergibt sich das Spektrum des Signals $x(t)$ nach dem Faltungstheorem als $\hat{x}(f) = \hat{x}_0(f)\hat{x}_1(f)$ gemäss folgender Darstellung



ii. Wir rufen in Erinnerung, dass

$$\mathcal{F}\left\{ x(\cdot) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\Big(\cdot - \frac{n}{f_s}\Big) \right\}(f) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}(f - kf_s) = 15 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}(f - 15k).$$

Das Spektrum des Signals $g(t)$ ist somit gegeben durch



Der grösstmögliche Wert von f_0, für den

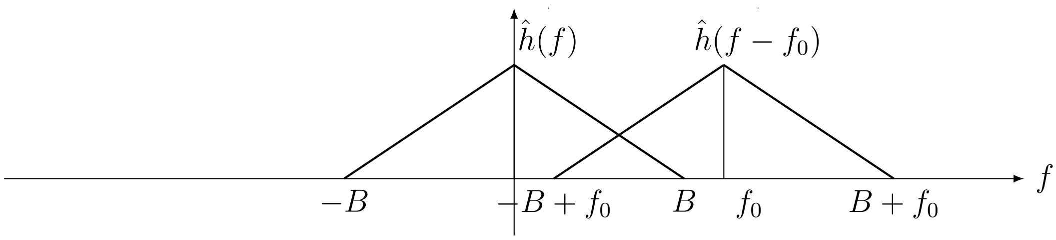
$$\hat{g}(f) = 15\,\hat{x}(f) \ \text{ für } |f| \leq f_0,$$

gilt, ist somit $f_0 = 5$Hz.

(b) Betrachten Sie das Problem im Frequenzbereich. Zunächst stellen wir fest, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-2\pi i f t}dt\Bigg|_{f=0} = \hat{h}(0) \qquad (*)$$

gilt. Dies bedeutet, dass die Abtastrate so gewählt werden muss, dass man lediglich $\hat{h}(0)$ perfekt aus den Abtastwerten rekonstruieren kann. Insbesondere dürfen wir Aliasing haben solange garantiert ist, dass $\hat{h}(0)$ perfekt rekonstruiert werden kann. Da das Signal $h(t)$ Bandbreite B hat und insbesondere $\hat{h}(B) = \hat{h}(-B) = 0$ gilt, können wir mit einer Rate von $f_0 \geq f_{\min} = B$ abtasten ohne an der Stelle $f = 0$ Aliasing zu verursachen (siehe Abbildung unten).



Wir tasten nun ab gemäss

$$m(t) = h(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\Big(t - \frac{n}{f_{\min}}\Big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h\Big(\frac{n}{f_{\min}}\Big)\delta\Big(t - \frac{n}{f_{\min}}\Big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \delta\Big(t - \frac{n}{f_{\min}}\Big),$$

wobei wir $h_n = h(\frac{n}{f_{\min}})$ gesetzt haben. Anwendung der Fouriertransformation liefert nun

$$\hat{m}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-2\pi i f \frac{n}{f_{\min}}}.$$

An der Stelle $f = 0$ ausgewertet erhalten wir

$$\hat{m}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n.$$

Mit $\hat{m}(f) = f_{\text{min}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(f - kf_{\text{min}})$ folgt nun dank $(*)$, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt = \frac{1}{f_{\text{min}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n,$$

d.h., das gesuchte Integral ist lediglich eine skalierte Summe der Abtastwerte.

2. **Aufgabe**

(a) Zur Berechnung der STFT von $y(t)$ bemerken wir zunächst, dass

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t-t_0)\cos(2\pi f_0 t) \\ &= \tfrac{1}{2}(u_+(t) + u_-(t)) \end{aligned}$$

gilt, wobei wir

$$u_\pm(t) = x(t-t_0)e^{\mp 2\pi i f_0 t}$$

gesetzt haben. Da die STFT linear ist, erhalten wir

$$F_y^w(\tau, f) = \tfrac{1}{2}(F_{u_+}^w(\tau, f) + F_{u_-}^w(\tau, f)). \tag{1}$$

Des Weiteren ist

$$\begin{aligned} F_{u_\pm}^w(\tau, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_\pm(t)w^*(t-\tau)e^{-2\pi i f t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)w^*(t-\tau)e^{-2\pi i (f\pm f_0)t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w^*(t-\tau+t_0)e^{-2\pi i (f\pm f_0)(t+t_0)}\mathrm{d}t \\ &= e^{-2\pi i (f\pm f_0)t_0}F_x^w(\tau - t_0, f \pm f_0). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich durch Einsetzen in (1)

$$F_y^w(\tau, f) = \tfrac{1}{2}e^{-2\pi i f t_0}\big(e^{-2\pi i f_0 t_0}F_x^w(\tau - t_0, f + f_0) + e^{2\pi i f_0 t_0}F_x^w(\tau - t_0, f - f_0)\big).$$

(b) Zunächst setzen wir

$$z_\tau(t) = x(t)w^*(t-\tau),$$

und bemerken, dass

$$\begin{aligned} \hat{z}_\tau(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} z_\tau(t)e^{-2\pi i f t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w^*(t-\tau)e^{-2\pi i f t}\mathrm{d}t \\ &= F_x^w(\tau, f) \end{aligned}$$

gilt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_x^w(\tau, f)v(t-\tau)e^{2\pi i f t}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}f \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{z}_\tau(f)e^{2\pi i f t}\mathrm{d}f\right)v(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z_\tau(t)v(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= x(t)\int_{-\infty}^{\infty} w^*(t-\tau)v(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= x(t)\int_{-\infty}^{\infty} w^*(\tau)v(\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Es ist also genau dann $y(t) = x(t)$, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^*(\tau)v(\tau)\mathrm{d}\tau = 1$$

gilt.

(c) Wir setzen wieder

$$z_\tau(t) = x(t)w^*(t-\tau)$$

mit dazugehöriger Fouriertransformierten

$$\hat{z}_\tau(f) = F_x^w(\tau, f).$$

Die Energie E kann nun wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_x^w(\tau, f)\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}f \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |F_x^w(\tau, f)|^2\mathrm{d}f\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{z}_\tau\|^2\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \|z_\tau\|^2\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\left(\int_{-\infty}^{\infty} |w(t-\tau)|^2 d\tau\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\left(\int_{-\infty}^{\infty} |w(\tau)|^2 d\tau\right)\mathrm{d}t \\
&= \|x\|^2\|w\|^2,
\end{aligned}$$

wobei wir die Parsevalsche Beziehung $\|\hat{z}_\tau\|^2 = \|z_\tau\|^2$ verwendet haben.

3. **Aufgabe**

(a) i. $h[n] = 0$, für $n < 0$, weil das System gemäss Angabe kausal ist. Für $n \geq 0$ benutzen wir, dass

$$h[n] = a\delta[n] - bh[n-2],$$

und berechnen $h[n]$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
&h[0] = a, \\
&h[1] = 0, \\
&h[2] = -bh[0] = -ab, \\
&h[3] = 0, \\
&h[4] = -bh[2] = ab^2, \\
&\vdots \\
&h[2k] = a(-b)^k, \\
&h[2k+1] = 0.
\end{aligned}$$

Die Impulsantwort $h[n]$ ist somit gegeben durch

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ a, & n = 0, \\ a(-b)^k, & n = 2k, \;\; k > 0, \\ 0, & n = 2k+1, \;\; k > 0. \end{cases}$$

ii. Ein zeitdiskretes LTI-System ist gedächtnislos, wenn $h[n] = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sonst wird es als gedächtnisbehaftet bezeichnet. Die Impulsantwort des vorliegenden Systems ist gegeben durch,

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ a, & n = 0, \\ a(-b)^k, & n = 2k, \;\; k > 0, \\ 0, & n = 2k+1, \;\; k > 0. \end{cases}$$

Das System ist somit gedächtnisbehaftet, wenn $b \neq 0$.

iii. Ein zeitdiskretes LTI-System ist BIBO-stabil, wenn jedes beschränkte Eingangssignal $x[n]$ zu einem beschränkten Ausgangssignal $y[n]$ führt. Eine hinreichende Bedingung für BIBO-Stabilität ist $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$. Damit ist das System für $|b| < 1$ BIBO-stabil, weil

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = a + \sum_{k=1}^{\infty} a|b|^k = \frac{a}{1-|b|} < \infty.$$

Um über Stabilität für $|b| > 1$ zu entscheiden, schreiben wir zunächst die Eingangs-Ausgangsbeziehung des Systems mit Hilfe der eben bestimmten Impulsantwort wie folgt

$$y[n] = ax[n] + \sum_{k=1}^{\infty} a(-b)^k x[n-2k].$$

Diese Darstellung wird nun verwendet um zu zeigen, dass das System für $|b| \geq 1$ nicht BIBO-stabil ist. Konkret zeigen wir, dass das beschränkte Eingangssignal

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \bmod 4, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

zu einem Ausgangssignal führt, welches für $n = 4m$, $m \in \mathbb{Z}$, unbeschränkt ist, d. h.,

$$y[4m] = a + \sum_{k=1}^{\infty} a(-b)^k x[4m-2k] = a + \sum_{l=1}^{\infty} a(-b)^{2l} = a + a\sum_{l=1}^{\infty} |b|^{2l} = \infty,$$

da die geometrische Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} |b|^{2l}$ wegen $|b| > 1$ divergiert.

(b) i. Wir beweisen die Linearität des Systems durch vollständige Induktion. Der Induktionsbeginn $n = 0$ folgt aus

$$y[0] = x[0],$$

was zeigt, dass die Eingangs-Ausgangsbeziehung zum Zeitpunkt $n = 0$ für alle $c \in \mathbb{R}$ linear ist. Die Induktionsvoraussetzung ist, dass das System zum Zeitpunkt $n-1$ linear ist, d.h., für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, führt das Eingangssignal $ax_1[n-1] + bx_2[n-1]$ zum Ausgangssignal $ay_1[n-1] + by_2[n-1]$, wobei $y_1[n]$ die Antwort auf $x_1[n]$ ist und $y_2[n]$ die Antwort auf $x_2[n]$. Es gilt nun zu zeigen, dass aus der Induktionsvoraussetzung Linearität zum Zeitpunkt n folgt, d. h., für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, führt das Eingangssignal $ax_1[n] + bx_2[n]$ zum Ausgangssignal $ay_1[n] + by_2[n]$. Dazu verwenden wir,

$$\begin{aligned}
y[n] &= cny[n-1] + ax_1[n] + bx_2[n], \\
y[n] &= cny[n-1] + a(y_1[n] - cny_1[n-1]) + b(y_2[n] - cny_2[n-1]), \\
y[n] &= ay_1[n] + by_2[n] + cn(y[n-1] - ay_1[n-1] - by_2[n-1]), \\
y[n] &= ay_1[n] + by_2[n],
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichung die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde.

ii. Für $c = 0$ folgt die Zeitinvarianz direkt aus $y[n] = x[n]$. Für $c \neq 0$ ist das System zeitvariant. Dies zeigen wir an Hand eines Beispiels wie folgt. Man betrachte das Eingangssignal $x[n] = 1$, für $n = 0, 1$, und $x[n] = 0$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Dies führt zu

$$\begin{aligned}
y[0] &= x[0] = 1, \\
y[1] &= cy[0] + x[1] = c + 1.
\end{aligned}$$

Wenn wir $x[n]$ nun um eine Einheit nach rechts verschieben, d.h., das Eingangssignal $\tilde{x}[n] = 1$, für $n = 1, 2$, und $\tilde{x}[n] = 0$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ betrachten, dann erhalten wir das zugehörige Ausgangssignal

$$\begin{aligned}
\tilde{y}[0] &= \tilde{x}[0] = 0, \\
\tilde{y}[1] &= c\tilde{y}[0] + \tilde{x}[1] = 1, \\
\tilde{y}[2] &= 2c\tilde{y}[1] + \tilde{x}[2] = 2c + 1.
\end{aligned}$$

Eine notwendige Bedingung für Zeitinvarianz ist $\tilde{y}[2] = y[1]$. Diese Bedingung ist für $c \neq 0$ nicht erfüllt. Daraus folgt nun, dass das System nur für $c = 0$ zeitinvariant ist.

4. **Aufgabe**

(a) Da

$$
\begin{aligned}
v[n] &:= x[n-2], \\
w[n] &:= \sum_{m=0}^{N-1} y[m] \cos\left(\frac{2\pi}{N}(n-m)\right),
\end{aligned}
$$

reellwertig sind, gilt $\mathfrak{Re}\{c[n]\} = v[n], \mathfrak{Im}\{c[n]\} = w[n]$, und somit (s. Gleichungen 85 und 86 in der Formelsammlung)

$$
\begin{aligned}
\hat{v}[k] &= \frac{1}{2}(\hat{c}[k] + \hat{c}^*[-k]), \\
\hat{w}[k] &= \frac{1}{2i}(\hat{c}[k] - \hat{c}^*[-k]).
\end{aligned}
$$

Durch Anwendung von Gleichung 77 in der Formelsammlung erhalten wir

$$
\hat{v}[k] = e^{-4\pi i k/N}\hat{x}[k],
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
\hat{x}[k] &= \frac{1}{2}e^{4\pi i k/N}\Big(\hat{c}[k] + \hat{c}^*[-k]\Big), \\
\hat{x}[1] &= \frac{1}{2}e^{4\pi i/N}\Big(\hat{c}[1] + \hat{c}^*[-1]\Big).
\end{aligned}
$$

Um $\hat{y}[1]$ zu bestimmen, verwenden wir Gleichungen 81 und 88 in der Formelsammlung:

$$
\hat{w}[k] = \frac{1}{2i}(\hat{c}[k] - \hat{c}^*[-k]) = \frac{N}{2}(\delta[k+1-N] + \delta[k-1])\hat{y}[k],
$$

und somit

$$
\hat{y}[1] = \frac{1}{iN}\left(\frac{\hat{c}[1] - \hat{c}^*[-1]}{\delta[2-N]+1}\right).
$$

Wenn $N = 2$, dann gilt

$$
\hat{y}[1] = \frac{\hat{c}[1] - \hat{c}^*[-1]}{4i}.
$$

Sonst, d.h., für $N > 2$, erhalten wir

$$
\hat{y}[1] = \frac{\hat{c}[1] - \hat{c}^*[-1]}{iN}.
$$

(b) i. Wir verwenden die folgende trigonometrische Identität

$$
\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}.
$$

Damit schreiben wir das Signal $x[n]$ gemäss:

$$
x[n] = 10\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 10.
$$

Dies führt nun zur Darstellung

$$x[n] = 5e^{\frac{i\pi n}{2}} + 5e^{-\frac{i\pi n}{2}} + 10 = \frac{1}{8}\Big(40e^{\frac{i2\pi}{8}2n} + 40e^{\frac{i2\pi}{8}(8-2)n} + 80\Big),$$

woraus wir die 8-Punkt DFT gemäss $(80, 0, 40, 0, 0, 0, 40, 0)$ ablesen können.

ii. Wir benutzen Gleichungen 68 und 69 in der Formelsammlung, und folgende Gleichung aus Teil (i)

$$x[n] = 10\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 10.$$

Dies ergibt

$$\hat{x}(\theta) = 5\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\theta + 1/4 - k) + 5\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\theta - 1/4 - k) + 10\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\theta - k).$$

(c) Wir berechnen $\hat{r}_{xy}[k]$ wie folgt:

$$\hat{r}_{xy}[k] = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y^*[m-n]e^{-2\pi i n/N}.$$

Nun setzen wir $l = m - n$, und schreiben damit die Gleichung gemäss

$$\hat{r}_{xy}[k] = \sum_{l=m}^{m-N+1}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y^*[l]e^{-2\pi i(m-l)/N}$$

um. Ändern der Summationsreihenfolge ergibt

$$\hat{r}_{xy}[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-2\pi i m/N}\sum_{l=m}^{m-N+1} y^*[l]e^{2\pi i l/N}.$$

Da $y[n]$ und $e^{2\pi i n/N}$ N-periodisch sind, können wir die letzte Gleichung wie folgt umformen

$$\hat{r}_{xy}[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-2\pi i m/N}\sum_{l=0}^{N-1} y^*[l]e^{2\pi i l/N}.$$

Daraus folgt schliesslich

$$\hat{r}_{xy}[k] = \hat{x}[k]\hat{y}^*[k].$$