Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Professur für Mathematische Informationswissenschaften
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
21. Januar 2020

Bitte beachten Sie:

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung ist die Formelsammlung erlaubt, die Sie von uns erhalten. Die Benutzung von Rechnern/Smartphones/Tablets jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Aufgabenteile, die mit einem ★ gekennzeichnet sind, können unabhängig von vorhergehenden Aufgabenteilen gelöst werden.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen Sie darauf hin, dass Studierende bei unehrlichem Handeln während der Prüfung den Strafnormen der Disziplinarordnung RSETHZ 361.1 der ETHZ unterstehen.

Vor der Klausur:

1. Dieses Angabenheft hat 6 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie bitte sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen ausschliesslich auf die bereitgestellten leeren Blätter. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie weitere Blätter.

Nach der Klausur:

5. Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen. Tragen Sie die Legi-Nr. und Ihren Namen auf dieser Seite ein und unterschreiben Sie. Alle Aufgabenblätter müssen abgegeben werden.

Nachname: .... Vorname: ....

Legi-Nr.: ....

Unterschrift: ....

1. **Aufgabe** (25 Punkte) Gegeben sei ein analoges, lineares, zeitinvariantes System mit Impulsantwort $h(t)$ und zugehöriger Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Des Weiteren sei $f_0 \in \mathbb{R}$ mit $f_0 > 0$ und

$$\hat{h}(f) = \frac{2\pi i(f/f_0)}{1 + 2\pi i(f/f_0)}$$

die Fouriertransformierte von $h(t)$.

★ (a) (6 Punkte) Bestimmen Sie $h(t)$.

(b) (5 Punkte) Ist das System BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ (c) (3 Punkte) Ist das System gedächtnislos? Begründen Sie Ihre Antwort.

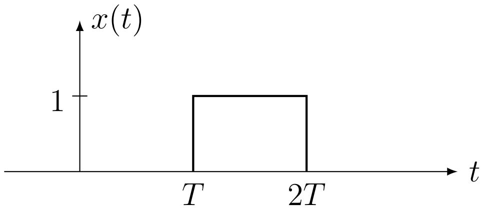
(d) (3 Punkte) Ist das System kausal? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ (e) (5 Punkte) Berechnen Sie die Sprungantwort $a(t) = (\sigma * h)(t)$ des Systems, wobei

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } t \geq 0 \\ 0, & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

die Sprungfunktion ist.

★ (f) (3 Punkte) Berechnen Sie die Antwort $y(t) = (x * h)(t)$ des Systems auf folgendes Eingangssignal:



$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } T \leq t \leq 2T \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit $T > 0$.

2. **Aufgabe** (25 Punkte) In dieser Aufgabe befassen wir uns mit dem Konzept der Fensterung für zeitdiskrete Signale, welches reflektiert, dass in der Praxis Signale $x[n]$ nur über eine endliche Zeitdauer gemessen werden können. Dies wird mathematisch durch die Anwendung eines Zeitfensters gemäss

$$y[n] = x[n]w[n],$$

beschrieben, wobei hier

$$w[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{2M+1}, & -2M \leq n \leq 2M \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{1}$$

das sogenannte Bartlett-Fenster ist.

★ (a) (9 Punkte) Bestimmen Sie $\hat{w}(\theta)$.

★ (b) (7 Punkte) Bestimmen Sie

$$\int_0^1 |\hat{y}(\theta)|^2 d\theta$$

für das Signal

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right),$$

und für $w[n]$ gemäss (1) mit $M = 1$.

★ (c) (9 Punkte) Nun betrachten wir das Rechteckfenster

$$w[n] = \begin{cases} 1, & -M \leq n \leq M \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie

$$\lim_{M \to \infty} \frac{\int_0^1 |\hat{y}(\theta)|^2 d\theta}{\int_0^1 |\hat{x}(\theta)|^2 d\theta}$$

für $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sigma[n]$, mit

$$\sigma(n) = \begin{cases} 1, & \text{für } n \geq 0 \\ 0, & \text{für } n < 0. \end{cases}$$

3. **Aufgabe** (25 Punkte)

Ein zeitdiskretes endlich-dimensionales Filter ist durch die Übertragungsfunktion

$$\hat{h}[k] = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \\ 0, & k = N/2, N/2 + 1, \dots, N - 1 \end{cases} \tag{2}$$

gegeben, wobei $N \in \mathbb{N}$ gerade ist.

★ (a) (2 Punkte) Berechnen Sie die zugehörige Impulsantwort

$$h[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{h}[k] e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$$

für allgemeines gerades $N \in \mathbb{N}$.

(b) (3 Punkte) Skizzieren Sie die Impulsantwort für $N = 4$. Stellen Sie Realteil und Imaginärteil der Impulsantwort getrennt dar.

★ (c) (5 Punkte) Stellen Sie die Anwendung dieses Filters, d.h., die Operation

$$y[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} h[\ell] x[n - \ell]$$

in Matrix-Vektor Form gemäss

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$$

dar, wobei

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[N-1] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N \times N}.$$

Geben Sie die Matrix $\mathbf{H}$ als Funktion von $h[n]$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, für allgemeines $h[n]$ an.

(d) (5 Punkte) Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\mathbf{H}$ für allgemeines gerades N und $\hat{h}[k]$ gemäss (2).

(e) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Dimension des Nullraumes $\mathcal{N}(\mathbf{H})$ für $\mathbf{H}$ gemäss Teilaufgabe (d).

(f) (5 Punkte) Geben Sie ein Signal im Nullraum von $\mathbf{H}$ an, wobei $\mathbf{H}$ gemäss Teilaufgabe (d) ist.

4. **Aufgabe** (25 Punkte)

   Diese Aufgabe befasst sich mit der sogenannten Parallelogrammgleichung. Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem linearen Raum E über $\mathbb{R}$ erfüllt die Parallelogrammgleichung, wenn gilt

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),\ \forall x, y \in E. \tag{3}$$

★ (a) (12 Punkte) Es sei H ein Hilbertraum zusammen mit seinem inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ und der zugehörigen induzierten Norm

$$\|x\|_H = \sqrt{\langle x, x\rangle_H},\ \forall x \in H. \tag{4}$$

   i. (2 Punkte) Geben Sie ein Beispiel an für einen solchen Hilbertraum zusammen mit dem zugehörigen inneren Produkt und der resultierenden induzierten Norm.

   ii. (3 Punkte) Beweisen Sie, dass die Norm $\|\cdot\|_H$ gemäss (4) die Parallelogrammgleichung (3) erfüllt.

   iii. (7 Punkte) Beweisen Sie die Parallelogrammgleichung für n Elemente $x_1, \ldots, x_n \in H$ für die Norm $\|\cdot\|_H$ gemäss (4):

$$\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\,\in\,\{-1,+1\}^n} \Big\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \Big\|_H^2 = 2^n \sum_{i=1}^n \|x_i\|_H^2.$$

   Hinweis: Entwickeln Sie zunächst die linke Seite unter Verwendung von

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \Big\|_H^2 = \Big\langle \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i, \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \Big\rangle_H$$

   und beweisen Sie, dass für $i \neq j$ gilt

$$\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\,\in\,\{-1,+1\}^n} \varepsilon_i \varepsilon_j = 0. \tag{$*$}$$

   Beachten Sie hierbei, dass die Summe ($*$) über alle 2^n Folgen $\{-1,+1\}^n$ genommen wird und 2^n notwendigerweise eine gerade Zahl ist.

★ (b) (13 Punkte) Wir sind nun am Beweis der folgenden Aussage interessiert.

   Theorem 1. *Wenn ein normierter linearer Raum $(E, \|\cdot\|_E)$ über $\mathbb{R}$ die Parallelogrammgleichung (3) erfüllt, dann können wir E mit einem inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ ausstatten, so dass*

$$\langle x, x\rangle_E = \|x\|_E^2,\ \forall x \in E.$$

   Konkret betrachten wir den Kandidaten $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definiert als

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}(\|x+y\|_E^2 - \|x-y\|_E^2),\ \forall x, y \in E. \tag{5}$$

Anmerkung: Für lineare Räume über $\mathbb{R}$ nimmt die konjugierte Symmetrie Eigenschaft die folgende Form an

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \ \forall x, y \in E.$$

i. (3 Punkte) Beweisen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in (5) die folgenden Eigenschaften besitzt:
   - $\langle x, x\rangle = \|x\|_E^2, \ \forall x \in E$;
   - Definitheit: $\langle x, x\rangle = 0$ impliziert $x = 0$;
   - Symmetrie: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \ \forall x, y \in E$.

ii. (8 Punkte) Beweisen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in (5) additiv ist gemäss

$$\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle, \ \forall x_1, x_2, y \in E.$$

Hinweis: Beweisen Sie zunächst mit Hilfe der Parallelogrammgleichung (3), dass

$$\begin{aligned}\|x_1 + x_2 + 2y\|_E^2 &= 2\|x_1 + y\|_E^2 + 2\|x_2 + y\|_E^2 - \|x_1 - x_2\|_E^2 \\ &= 2\|x_1 + x_2 + y\|_E^2 + 2\|y\|_E^2 - \|x_1 + x_2\|_E^2,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|x_1 + x_2 - 2y\|_E^2 &= 2\|x_1 - y\|_E^2 + 2\|x_2 - y\|_E^2 - \|x_1 - x_2\|_E^2 \\ &= 2\|x_1 + x_2 - y\|_E^2 + 2\|y\|_E^2 - \|x_1 + x_2\|_E^2.\end{aligned}$$

iii. (2 Punkte) Gehen Sie ohne Beweis davon aus, dass der Kandidat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in (5) die Beziehung

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \ \forall x, y \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

erfüllt. Erläutern Sie warum diese Beziehung, gemeinsam mit bereits gezeigten Aussagen, den Beweis von Theorem 1 abschliesst.

Hinweis: Sie dürfen in diesem Punkt die Eigenschaften in den Punkten (b)i. und (b)ii. verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.