

Lösung zur Klausur zu Signal- und Systemtheorie I 21. Januar 2020

1. Aufgabe

(a) Wir schreiben zunächst $\hat{h}(f) = \hat{u}(f)\hat{v}(f)$ mit

$$\begin{aligned}\hat{u}(f) &= 2\pi i f \\ \hat{v}(f) &= \frac{1}{f_0 + 2\pi i f}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Gleichung 24 (für $a = f_0$) aus der Formelsammlung erhalten wir

$$v(t) = e^{-f_0 t} \sigma(t).$$

Unter Zuhilfenahme von Gleichung 14 (für $n = 1$) aus der Formelsammlung folgt

$$\begin{aligned}h(t) &= \frac{dv(t)}{dt} \\ &= \frac{d(e^{-f_0 t} \sigma(t))}{dt} \\ &= -f_0 e^{-f_0 t} \sigma(t) + e^{-f_0 t} \delta(t) \\ &= -f_0 e^{-f_0 t} \sigma(t) + \delta(t).\end{aligned}\tag{1}$$

(b) Wir zeigen, dass für jedes Eingangssignal $x(t)$ mit der Eigenschaft $|x(t)| \leq B < \infty$, für alle t , gilt, dass das Ausgangssignal $y(t) = (x * h)(t)$ die Beziehung $|y(t)| \leq 2B$, für alle t , erfüllt. Folglich ist das System BIBO-stabil. Es sei also $x(t)$ so dass $|x(t)| \leq B$, für alle t , gilt. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}|y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} -f_0 e^{-f_0(t-\tau)} \sigma(t - \tau) x(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) x(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^t f_0 e^{-f_0(t-\tau)} |x(\tau)| d\tau + |x(t)| \\ &\leq B \left(1 + e^{-f_0 t} \int_{-\infty}^t f_0 e^{f_0 \tau} d\tau \right) \\ &= B \left(1 + e^{-f_0 t} e^{f_0 t} \right) \\ &= B \left(1 + e^{-f_0 t} e^{f_0 t} - e^{-f_0 t} e^{-\infty} \right) \\ &= 2B, \quad \text{für alle } t.\end{aligned}$$

- (c) Ein gedächtnisloses lineares zeitinvariantes System muss notwendigerweise die Eingangs-Ausgangsbeziehung $y(t) = \alpha x(t)$ haben, mit $\alpha \in \mathbb{C}$. Nun ist aber $y(t) = (x * h)(t)$ genau dann gleich $\alpha x(t)$ für alle Signale $x(t)$, wenn $h(t) = \alpha \delta(t)$ ist. Ein Vergleich mit der Lösung aus Teilaufgabe (a) zeigt, dass dies nicht der Fall ist. Damit ist das System gedächtnisbehaftet.
- (d) Das System ist kausal, da

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f_0 e^{-f_0(t-\tau)} \sigma(t - \tau) x(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) x(\tau) d\tau \\ &= - \int_{-\infty}^t f_0 e^{-f_0(t-\tau)} x(\tau) d\tau + x(t) \end{aligned}$$

zum Zeitpunkt t_0 nur von Werten von $x(t)$ für $t \leq t_0$ abhängt. Äquivalent kann man die Kausalität über $h(t) = 0$, für alle $t < 0$, argumentieren.

- (e) Die Sprungantwort des Systems ergibt sich gemäss

$$\begin{aligned} a(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t - \tau) h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t \frac{dv(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= v(t) \\ &= e^{-f_0 t} \sigma(t), \end{aligned}$$

wobei wir $h(\tau) = dv(\tau)/d\tau$ mit $v(\tau) = e^{-f_0 \tau} \sigma(\tau)$ verwendet haben (siehe Gleichung (1)).

- (f) Wir stellen das Signal $x(t)$ zunächst in der Form $x(t) = \sigma(t - T) - \sigma(t - 2T)$ dar und erhalten damit das zugehörige Ausgangssignal, unter Verwendung der Zeitinvarianz und der Linearität des Systems, gemäss

$$\begin{aligned} y(t) &= a(t - T) - a(t - 2T) \\ &= e^{-f_0(t-T)} \sigma(t - T) - e^{-f_0(t-2T)} \sigma(t - 2T), \end{aligned}$$

wobei $a(t)$ die Sprungantwort aus Teilaufgabe (e) ist.

2. Aufgabe

- (a) Man kann das Bartlett-Fenster $w[n]$ gemäss

$$w[n] = (x * x)[n]$$

ausdrücken, wobei

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2M+1}}, & -M \leq n \leq M \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Hilfe von Gleichung 59 aus der Formelsammlung erhalten wir

$$\hat{w}(\theta) = (\hat{x}(\theta))^2.$$

Unter Zuhilfenahme von Gleichung 75 (für $N_1 = M$) aus der Formelsammlung folgt schliesslich

$$\hat{w}(\theta) = \frac{1}{2M+1} \left(\frac{\sin((2M+1)\pi\theta)}{\sin(\pi\theta)} \right)^2.$$

- (b) Die Parsevalsche Beziehung für (aperiodische) zeitdiskrete Signale ergibt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 = \int_0^1 |\hat{y}(\theta)|^2 d\theta.$$

Ausgehend vom gefensterten Signal

$$y[n] = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \left(1 - \frac{|n|}{3}\right), & -2 \leq n \leq 2 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

berechnen wir $y[-2] = 0, y[-1] = -\frac{2}{3}, y[0] = 0, y[1] = \frac{2}{3}, y[2] = 0$. Daraus folgt nun

$$\int_0^1 |\hat{y}(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 = \frac{8}{9}.$$

- (c) Die Parsevalsche Beziehung für (aperiodische) zeitdiskrete Signale ergibt

$$\int_0^1 |\hat{x}(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{9}{8}.$$

Für $y[n] = x[n]w[n]$ liefert die Parsevalsche Beziehung für (aperiodische) zeitdiskrete Signale

$$\int_0^1 |\hat{y}(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |w[n]x[n]|^2 = \sum_{n=0}^M \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1 - (1/9)^{M+1}}{8/9}.$$

Schliesslich erhalten wir

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 |\hat{y}(\theta)|^2 d\theta}{\int_0^1 |\hat{x}(\theta)|^2 d\theta} = \lim_{M \rightarrow \infty} (1 - (1/9)^{M+1}) = 1.$$

Je länger das Fenster $w[n]$ ist, desto näher ist die Energie des gefensterten Signals an der Energie des Eingangssignals.

3. Aufgabe

(a)

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{h}[k] e^{i2\pi k \frac{n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{i2\pi k \frac{n}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \left(\frac{1 - e^{i2\pi \frac{n}{N} (N/2)}}{1 - e^{i2\pi n/N}} \right) = \frac{1}{N} \left(\frac{1 - (-1)^n}{1 - e^{i2\pi \frac{n}{N}}} \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

(b)

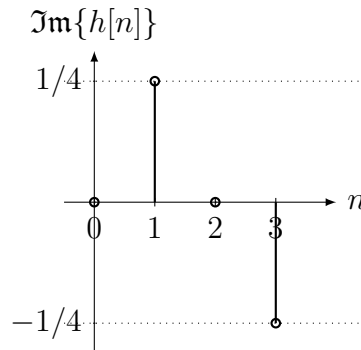
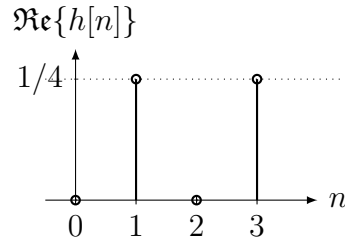
$$h[n] = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - (-1)^n}{1 - e^{i2\pi \frac{n}{4}}} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - (-1)^n}{1 - e^{i\pi \frac{n}{2}}} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

$$h[0] = 1/2$$

$$h[1] = \frac{1}{4} \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - i} = \frac{1}{2} \frac{1+i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2} \frac{1+i}{2} = \frac{1}{4} (1+i).$$

$$h[2] = 0$$

$$h[3] = \frac{1}{4} \frac{2}{1 - e^{i\frac{3\pi}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + i} = \frac{1}{2} \frac{1-i}{2} = \frac{1}{4} (1-i).$$



(c) Zuerst bemerken wir, dass $h[n]$ N -periodisch ist, weil

$$h[n+N] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{h}[k] e^{i2\pi k (\frac{n+N}{N})} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{h}[k] e^{i2\pi k \frac{n}{N}} \underbrace{e^{i2\pi k}}_1 = h[n]. \quad (2)$$

Ausgehend von

$$y[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} h[\ell]x[n-\ell] = \sum_{\ell=0}^{N-1} h[n-\ell]x[\ell]$$

folgt nun

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h[0] & h[-1] & \dots & h[-N+1] \\ h[1] & h[0] & \dots & h[-N+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[N-1] & h[N-2] & \dots & h[0] \end{bmatrix},$$

und dank der N -Periodizität von $h[n]$ ergibt sich

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h[0] & h[N-1] & \dots & h[1] \\ h[1] & h[0] & \dots & h[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[N-1] & h[N-2] & \dots & h[0] \end{bmatrix}.$$

(d) Da die Matrix $\mathbf{H}$ zirkulant ist, kann sie in der Form

$$\mathbf{H} = \frac{1}{N} \mathbf{F}_N^H \begin{bmatrix} \hat{h}[0] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{h}[1] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{h}[N-1] \end{bmatrix} \mathbf{F}_N,$$

dargestellt werden. Einsetzen der spezifischen Form von $\hat{h}[k]$ gemäss (2) aus der Aufgabenstellung ergibt nun

$$\mathbf{H} = \frac{1}{N} \mathbf{F}_N^H \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{F}_N. \quad (3)$$

Da $\mathbf{F}_N$ eine orthogonale Matrix ist, gilt

$$\text{rang}(\mathbf{H}) = \text{rang} \left(\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{N}{2}.$$

- (e) $\dim \mathcal{R}(\mathbf{H}) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{H}) = N$. Mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe (d) folgt $\dim \mathcal{R}(\mathbf{H}) = N/2$, und damit erhalten wir $\dim \mathcal{N}(\mathbf{H}) = N - N/2 = N/2$.
- (f) Aus der Darstellung (3) folgt, dass der Nullraum von $\mathbf{H}$ gegeben ist durch die Signale deren DFT $\hat{x}[k]$ erfüllt

$$\hat{x}[k] = 0, \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, N/2 - 1.$$

Ein Beispiel eines solchen Signals wäre

$$\hat{x}[k] = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \\ 1, & k = N/2, N/2 + 1, \dots, N - 1. \end{cases}$$

4. Aufgabe

- (a) i. $H = L^2(\mathbb{R})$, der lineare Raum aller Funktionen $x(t) \in \mathbb{R}$, die $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$ erfüllen, ausgestattet mit dem inneren Produkt

$$\langle x, y \rangle_H = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt,$$

und der zugehörigen induzierten Norm

$$\|x\|_H = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt}.$$

- ii. Für $x, y \in H$ gilt

$$\begin{aligned} \|x+y\|_H^2 + \|x-y\|_H^2 &= \langle x+y, x+y \rangle_H + \langle x-y, x-y \rangle_H \\ &= \langle x, x \rangle_H + 2\langle x, y \rangle_H + \langle y, y \rangle_H \\ &\quad + \langle x, x \rangle_H - 2\langle x, y \rangle_H + \langle y, y \rangle_H \\ &= 2\langle x, x \rangle_H + 2\langle y, y \rangle_H \\ &= 2(\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2). \end{aligned}$$

- iii. Für $x_1, \dots, x_n \in H$ gilt

$$\begin{aligned} &\sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^n} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_H^2 \\ &= \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^n} \left\langle \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i, \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \right\rangle_H \\ &= \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle x_i, x_j \rangle_H \\ &= \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^n} \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \langle x_i, x_i \rangle_H + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \varepsilon_i \varepsilon_j \langle x_i, x_j \rangle_H \right) \\ &= \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^n} \sum_{i=1}^n \|x_i\|_H^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \left(\sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^n} \varepsilon_i \varepsilon_j \right) \langle x_i, x_j \rangle_H \\ &= 2^n \sum_{i=1}^n \|x_i\|_H^2. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass es für jedes Paar i, j mit $i \neq j$ die vier Möglichkeiten $\{(\varepsilon_i = +1, \varepsilon_j = +1), (\varepsilon_i = -1, \varepsilon_j = +1), (\varepsilon_i = +1, \varepsilon_j = -1), (\varepsilon_i = -1, \varepsilon_j = -1)\}$ gibt. Insgesamt gibt es 2^n (also eine gerade Anzahl von) Sequenzen in der Menge $\{-1, +1\}^n$ und damit ist $\varepsilon_i \varepsilon_j$ genau so oft $+1$ wie -1 was

$$\sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^n} \varepsilon_i \varepsilon_j = 0$$

impliziert.

(b) i. • $\langle x, x \rangle = \frac{1}{4}(\|x + x\|_E^2 - \|x - x\|_E^2) = \frac{1}{4}\|2x\|_E^2 = \|x\|_E^2.$

Die letzte Gleichung folgt aus der Homogenität der Norm $\|\cdot\|_E$.

• $\langle x, x \rangle = 0 \implies \|x\|_E^2 = 0 \implies x = 0.$

Hier wurde die Definitheit der Norm $\|\cdot\|_E$ verwendet.

• $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|_E^2 - \|x - y\|_E^2) = \frac{1}{4}(\|y + x\|_E^2 - \|y - x\|_E^2) = \langle y, x \rangle.$

Hier wurde wieder die Homogenität der Norm $\|\cdot\|_E$ verwendet.

ii. Wir beweisen zuerst die Identitäten im Hinweis:

$$\begin{aligned} & \|x_1 + x_2 + 2y\|_E^2 + \|x_1 - x_2\|_E^2 \\ &= \|(x_1 + y) + (x_2 + y)\|_E^2 + \|(x_1 + y) - (x_2 + y)\|_E^2 \\ &\stackrel{Par.Gl.}{=} 2\|x_1 + y\|_E^2 + 2\|x_2 + y\|_E^2, \end{aligned} \quad (4)$$

und

$$\begin{aligned} & \|x_1 + x_2 + 2y\|_E^2 + \|x_1 + x_2\|_E^2 \\ &= \|(x_1 + x_2 + y) + y\|_E^2 + \|(x_1 + x_2 + y) - y\|_E^2 \\ &\stackrel{Par.Gl.}{=} 2\|x_1 + x_2 + y\|_E^2 + 2\|y\|_E^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Die zweite Gruppe von Identitäten folgt direkt aus der ersten, wenn man y durch $-y$ ersetzt.

Der Beweis der Additivität folgt nun gemäss

$$\begin{aligned} \langle x_1 + x_2, y \rangle &= \frac{1}{4}(\|x_1 + x_2 + y\|_E^2 - \|x_1 + x_2 - y\|_E^2) \\ &= \frac{1}{8} \left((2\|x_1 + x_2 + y\|_E^2 + 2\|y\|_E^2) - (2\|x_1 + x_2 - y\|_E^2 + 2\|y\|_E^2) \right) \\ &\stackrel{(5)}{=} \frac{1}{8} \left((\|x_1 + x_2 + 2y\|_E^2 + \|x_1 + x_2\|_E^2) \right. \\ &\quad \left. - (\|x_1 + x_2 - 2y\|_E^2 + \|x_1 + x_2\|_E^2) \right) \\ &= \frac{1}{8}(\|x_1 + x_2 + 2y\|_E^2 - \|x_1 + x_2 - 2y\|_E^2) \\ &= \frac{1}{8} \left((\|x_1 + x_2 + 2y\|_E^2 + \|x_1 - x_2\|_E^2) \right. \\ &\quad \left. - (\|x_1 + x_2 - 2y\|_E^2 + \|x_1 - x_2\|_E^2) \right) \\ &\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{8}(2\|x_1 + y\|_E^2 + 2\|x_2 + y\|_E^2 - 2\|x_1 - y\|_E^2 - 2\|x_2 - y\|_E^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|x_1 + y\|_E^2 - \|x_1 - y\|_E^2) + \frac{1}{4}(\|x_2 + y\|_E^2 - \|x_2 - y\|_E^2) \\ &= \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle. \end{aligned}$$

- iii. Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in Gl. (5) in der Aufgabenstellung ist definit (s. Eigenschaft (b)i.), konjugiert symmetrisch (s. Eigenschaft (b)i.), additiv (s. Eigenschaft (b)ii.), und dank der Annahme in diesem Aufgabenteil auch homogen und somit ein inneres Produkt. Wir haben E daher mit einem inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ ausgestattet so dass

$$\langle x, x \rangle_E = \|x\|_E^2, \quad \forall x \in E.$$