Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Professur für Mathematische Informationswissenschaften
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

enumii1

Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
26. August 2020

Bitte beachten Sie:
- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung ist die Formelsammlung erlaubt, die Sie von uns erhalten. Die Benutzung von Rechnern/Smartphones/Tablets jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Aufgabenteile, die mit einem ★ gekennzeichnet sind, können unabhängig von vorhergehenden Aufgabenteilen gelöst werden.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen Sie darauf hin, dass Studierende bei unehrlichem Handeln während der Prüfung den Strafnormen der Disziplinarordnung RSETHZ 361.1 der ETHZ unterstehen.

Vor der Klausur:
1. Dieses Angabenheft hat 5 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie bitte sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen ausschliesslich auf die bereitgestellten leeren Blätter. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie weitere Blätter.

Nach der Klausur:

5. Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen. Tragen Sie die Legi-Nr. und Ihren Namen auf dieser Seite unten ein und unterschreiben Sie. Alle Aufgabenblätter müssen abgegeben werden.

Nachname: .... Vorname: ....

Legi-Nr.: ....

Unterschrift: ....

1. **Aufgabe** (20 Punkte) Gegeben sei das T-periodische Signal $x(t)$ mit Fourierreihenkoeffizienten x_n, $n \in \mathbb{Z}$.

★ (a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Fourierreihenkoeffizienten y_n, $n \in \mathbb{Z}$, des T-periodischen Signals $y(t) = x(t - T/2)$ als Funktion von x_n, $n \in \mathbb{Z}$.

★ (b) (8 Punkte) Betrachten Sie nun die Fourierreihenkoeffizienten

$$f_n = \begin{cases} x_n, & \text{für gerade } n \\ 0, & \text{für ungerade } n, \end{cases}$$

$$g_n = \begin{cases} 0, & \text{für gerade } n \\ x_n, & \text{für ungerade } n, \end{cases}$$

und drücken Sie

i. (4 Punkte) $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \, e^{2\pi i \frac{n}{T} t}$

ii. (4 Punkte) $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \, e^{2\pi i \frac{n}{T} t}$

als Funktion von $x(t)$ und $y(t)$ aus.

Hinweis: Die Aufgabe kann effizient unter Verwendung des Ergebnisses aus Teilaufgabe (1a) *gelöst werden.*

★ (c) (10 Punkte) Das T-periodische Signal $x(t)$ mit Fourierreihenkoeffizienten x_n, $n \in \mathbb{Z}$, liege nun an einem LTI-System mit Impulsantwort $h(t)$ an. Das zugehörige Ausgangssignal ist gegeben durch $u(t) = (h * x)(t)$.

i. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $u(t)$ ebenfalls T-periodisch ist.

ii. (2 Punkte) Bestimmen Sie die Fourierreihenkoeffizienten u_n, $n \in \mathbb{Z}$, des T-periodischen Signals $u(t)$ als Funktion von $h(t)$.

iii. (3 Punkte) Nehmen Sie nun an, dass das LTI-System mit Impulsantwort $h(t)$ ein Tiefpassfilter mit der Grenzfrequenz f_g ist, d.h.,

$$\hat{h}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_g \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Fourierreihenkoeffizienten u_n, $n \in \mathbb{Z}$, des zugehörigen Ausgangssignals $u(t) = (h * x)(t)$ für $f_g = \frac{1.2}{T}$ als Funktion von x_n, $n \in \mathbb{Z}$.

iv. (3 Punkte) Berechnen Sie $u(t) = (h * x)(t)$ für das Bandpassfilter

$$\hat{h}(f) = \begin{cases} 1, & \frac{1.2}{T} < |f| < \frac{1.4}{T} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. **Aufgabe** (25 Punkte) Betrachten Sie das zeitdiskrete System mit der folgenden Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$y[n] = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} \sum_{\ell=0}^{n} x[\ell], & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases} \tag{1}$$

★ (a) (5 Punkte) Ist das System zeitinvariant? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ (b) (2 Punkte) Ist das System linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ (c) (2 Punkte) Ist das System gedächtnisbehaftet? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ (d) (2 Punkte) Ist das System kausal? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ (e) (2 Punkte) Ist das System BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ (f) (12 Punkte) Betrachten Sie nun ausgehend von (1) das System mit dem Ausgangssignal $(2n + 1)y[n]$.

   i. (1 Punkte) Geben Sie die Eingangs-Ausgangsbeziehung dieses Systems an.

   ii. (5 Punkte) Ist dieses System zeitinvariant? Begründen Sie Ihre Antwort.

   iii. (2 Punkte) Ist dieses System kausal? Begründen Sie Ihre Antwort.

   iv. (4 Punkte) Ist dieses System BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. **Aufgabe** (25 Punkte)

★ (a) (10 Punkte) Es sei $x[n]$, $n = 0, \ldots, N-1$, ein zeitdiskretes Signal der Länge N. Des Weiteren definieren wir das zeitdiskrete Signal $y[n]$ der Länge $2N$ gemäss

$$y[n] = \begin{cases} x[n], & n = 0, \ldots, N-1 \\ x[n-N], & n = N, \ldots, 2N-1. \end{cases}$$

Finden Sie einen Ausdruck für die $2N$-Punkt DFT $\hat{y}[k]$ von $y[n]$ als Funktion der N-Punkt DFT $\hat{x}[k]$ von $x[n]$.

★ (b) (8 Punkte) Ein Signal $x[n]$, $n = 0, \ldots, N-1$, wird als N-*Punkt zirkulant gerade* bezeichnet, wenn

$$x[N-n] = x[n], \quad \text{für } n = 0, \ldots, N-1,$$

gilt. (Beachten Sie, dass $x[N] = x[0]$.) Beweisen Sie, dass die N-Punkt DFT $\hat{x}[k]$ des N-Punkt zirkulant geraden Signals $x[n]$ ebenfalls N-Punkt zirkulant gerade ist.

★ (c) (3 Punkte) Geben Sie die Ordnung $\mathcal{O}(\cdot)$ der Komplexität des in der Vorlesung behandelten FFT-Algorithmus von Cooley und Tukey als Funktion der DFT-Länge N an.

★ (d) (4 Punkte) Beschreiben Sie die Kernidee des in der Vorlesung behandelten FFT-Algorithmus von Cooley und Tukey.

4. **Aufgabe** (30 Punkte)

★ (a) (14 Punkte) Es sei $T \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie das zeitkontinuierliche Signal

$$x(t) = \cos(2\pi t) + a\sin(2\pi t),\ t \in \mathbb{R},$$

das gemäss

$$y(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{2}$$

abgetastet wird.

i. (4 Punkte) Berechnen Sie das Spektrum $\hat{x}(f)$ des Signals $x(t)$.

ii. (4 Punkte) Berechnen Sie das Spektrum $\hat{y}(f)$ des Signals $y(t)$.

iii. (6 Punkte) Kann der Parameter a für $T = 1$ eindeutig aus $y(t)$ bestimmt werden? *Hinweis: Betrachten Sie $\hat{y}$.*

★ (b) (16 Punkte) Es sei $B > 0$ fest. In dieser Teilaufgabe betrachten wir ein auf $[-B, B]$ bandbegrenztes Signal x, d.h., $\hat{x}(f) = 0$, für alle $f \in \mathbb{R}$ mit $|f| > B$. Ist es möglich für dieses Signal $x(t)$ das zugehörige Signal

i. (4 Punkte) $z(t) = x(t),\ t \in \mathbb{R}$,

ii. (4 Punkte) $z(t) = x^2(t),\ t \in \mathbb{R}$,

iii. (4 Punkte) $z(t) = (x * x)(t),\ t \in \mathbb{R}$,

iv. (4 Punkte) $z(t) = 2x(t)\cos(2\pi Bt),\ t \in \mathbb{R}$,

gemäss Abtasttheorem aus seinen Abtastwerten $z(nT), n \in \mathbb{Z}$, mit $T = 1/(3B)$, zu rekonstruieren? Begründen Sie Ihre Antworten. Für den Fall, dass eine Rekonstruktion möglich ist, geben Sie eine Rekonstruktionsformel an.