Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Professur für Mathematische Informationswissenschaften
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Lösung zur
Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
26. August 2020

1. **Aufgabe**

(a) Aus Nr. 35 in der Formelsammlung erhalten wir

$$y_n = e^{-2\pi i n T/(2T)} x_n = (-1)^n x_n.$$

(b) i. Mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe (a) folgt

$$f_n = \frac{x_n + (-1)^n x_n}{2} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

und damit

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \, e^{2\pi i \frac{n}{T} t} = \frac{x(t) + y(t)}{2}.$$

ii. Mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe (a) folgt

$$g_n = \frac{x_n - (-1)^n x_n}{2} = \frac{x_n - y_n}{2}$$

und damit

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \, e^{2\pi i \frac{n}{T} t} = \frac{x(t) - y(t)}{2}.$$

(c) i. Da $x(t)$ T-periodisch ist, haben wir

$$u(t-T) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - T - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = u(t).$$

Somit ist $u(t)$ ebenfalls T-periodisch.

ii. Aus $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{2\pi i \frac{n}{T} t}$ und der Tatsache, dass komplexe Exponentialfunktionen Eigenfunktionen von LTI-Systemen sind, folgt

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \, \hat{h}\left(\frac{n}{T}\right) e^{2\pi i \frac{n}{T} t}, \tag{1}$$

woraus sich die Fourierreihenkoeffizienten von $u(t)$ zu

$$u_n = x_n \, \hat{h}\left(\frac{n}{T}\right) \tag{2}$$

ergeben.

iii. Wir haben

$$\hat{h}\left(\frac{n}{T}\right) = \begin{cases} 1, & \left|\frac{n}{T}\right| \leq \frac{1.2}{T} \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

und damit

$$\hat{h}\left(\frac{n}{T}\right) = \begin{cases} 1, & n = -1, 0, 1 \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Somit folgt aus (2), dass

$$u_n = \begin{cases} x_n, & n = -1, 0, 1 \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

iv. Wir haben

$$\hat{h}\left(\frac{n}{T}\right) = \begin{cases} 1, & \frac{1.2}{T} < \left|\frac{n}{T}\right| < \frac{1.4}{T} \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

und damit

$$\hat{h}\left(\frac{n}{T}\right) = 0$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Somit folgt aus (1), dass

$$u(t) = 0.$$

2. **Aufgabe**

(a) Für Zeitinvarianz muss, für jedes Eingangssignal $x[n]$, das Eingangssignal $x[n-n_0]$, für jedes $n_0 \in \mathbb{Z}$, zum Ausgangssignal $y[n-n_0]$ führen, wobei hier $y[n]$ das zu $x[n]$ gehörige Ausgangssignal ist. Einsetzen in die Eingangs-Ausgangsbeziehung zeigt, dass das Eingangssignal $\tilde{x}[n] = x[n-n_0]$ zum Ausgangssignal

$$\tilde{y}[n] = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} \sum_{\ell=0}^{n} x[\ell - n_0], & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

führt. Da aber

$$y[n-n_0] = \begin{cases} \frac{1}{2(n-n_0)+1} \sum_{\ell=0}^{n-n_0} x[\ell], & n-n_0 \geq 0, \\ 0, & n-n_0 < 0, \end{cases}$$

folgt z. B. für $n=1$, $n_0=1$, dass, für allgemeines $x[n]$,

$$\tilde{y}[1] = \frac{1}{3}x[-1] + \frac{1}{3}x[0] \neq y[n-n_0] = y[0] = x[0].$$

Somit ist das System nicht zeitinvariant.

(b) Wir setzen

$$y_1[n] = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} \sum_{\ell=0}^{n} x_1[\ell], & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

und

$$y_2[n] = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} \sum_{\ell=0}^{n} x_2[\ell], & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

und betrachten die Antwort $y[n]$ auf $\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch

$$y[n] = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} \sum_{\ell=0}^{n} (\alpha x_1[\ell] + \beta x_2[\ell]), & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\alpha}{2n+1} \sum_{\ell=0}^{n} x_1[\ell] + \frac{\beta}{2n+1} \sum_{\ell=0}^{n} x_2[\ell], & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Da $y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$ folgt, dass das System linear ist.

(c) Das System ist gedächtnisbehaftet, weil $y[n]$ von $x[\ell]$, für $\ell = 0, \dots, n$, abhängt.

(d) Das System ist kausal, weil $y[n_0]$ nur von Werten von $x[n]$ für $n \leq n_0$ abhängt.

(e) Wenn $|x[n]| \leq B < \infty$, für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$|y[n]| = \begin{cases} \left| \frac{1}{2n+1} \sum_{\ell=0}^{n} x[\ell] \right| \leq \frac{B(n+1)}{2n+1} \leq B, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

und damit ist das System BIBO-stabil.

(f) i. Die Eingangs-Ausgangsbeziehung des Systems ist gegeben durch

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{\ell=0}^{n} x[\ell], & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

ii. Das Eingangssignal $\tilde{x}[n] = x[n - n_0]$ führt zum Ausgangssignal

$$\tilde{y}[n] = \begin{cases} \sum_{\ell=0}^{n} x[\ell - n_0], & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

wohingegen

$$y[n - n_0] = \begin{cases} \sum_{\ell=0}^{n-n_0} x[\ell], & n \geq n_0, \\ 0, & n < n_0. \end{cases}$$

Im Allgemeinen gilt $\tilde{y}[n] \neq y[n - n_0]$. Dies kann an Hand des Beispiels $n_0 = 1$ verifiziert werden. Hier erhält man

$$\tilde{y}[n] = \begin{cases} x[-1] + \cdots + x[n-1], & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

und

$$y[n - 1] = \begin{cases} x[0] + \cdots + x[n-1], & n \geq 1, \\ 0, & n < 1. \end{cases}$$

Wählt man nun ein Eingangssignal $x[n]$ für das $x[-1] \neq 0$, so folgt $\tilde{y}[n] \neq y[n-1]$. Das System ist somit nicht zeitinvariant.

iii. Das System ist kausal, weil $y[n_0]$ nur von Werten von $x[n]$ für $n \leq n_0$

abhängt.

iv. Es sei $x[n] = 1$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$|y[n]| = \begin{cases} |\sum_{\ell=0}^{n} x[\ell]| = n+1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

und weil $n+1$ unbegrenzt wächst mit n, ist das System nicht BIBO-stabil.

3. **Aufgabe**

(a) Wir stellen $\hat{y}[k]$ zunächst gemäss

$$\hat{y}[k] = \sum_{n=0}^{2N-1} y[n] e^{-2\pi i k \frac{n}{2N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i k \frac{n}{2N}} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[n-N] e^{-2\pi i k \frac{n}{2N}} \tag{3}$$

dar und führen dann im zweiten Term die Variablensubstitution $\ell = n - N$ durch:

$$\begin{aligned}
\hat{y}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i k \frac{n}{2N}} + e^{-\pi i k} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell] e^{-2\pi i k \frac{\ell}{2N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i k \frac{n}{2N}} + (-1)^k \sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell] e^{-2\pi i k \frac{\ell}{2N}} \\
&= (1 + (-1)^k) \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i k \frac{n}{2N}}.
\end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung folgt nun

$$\hat{y}[k] = \begin{cases} 2\,\hat{x}[k/2], & k \text{ gerade}, \\ 0, & k \text{ ungerade}, \end{cases}$$

wobei $\hat{x}[k]$ die N-Punkt DFT von $x[n]$ ist.

(b)

$$\begin{aligned}
\hat{x}[N-k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i (N-k) \frac{n}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \underbrace{e^{-2\pi i n}}_{1} e^{2\pi i k \frac{n}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[N-n] e^{2\pi i k \frac{n}{N}},
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichung $x[n] = x[N-n]$, $n = 0, \ldots, N-1$, verwendet wurde. Nun substituieren wir $\ell = N - n$ und erhalten damit

$$\hat{x}[N-k] = \sum_{\ell=1}^{N} x[\ell] e^{2\pi i k \frac{(N-\ell)}{N}} = \sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell] e^{2\pi i k \frac{(N-\ell)}{N}} = \sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell] e^{-2\pi i k \frac{\ell}{N}} = \hat{x}[k].$$

(c) $\mathcal{O}(N \log_2(N))$

(d) Die Kernidee des Algorithmus ist das „divide-and-conquer“ Prinzip. Man zerlegt die Berechnung der DFT der Länge N in die Berechnung zweier DFTs der Länge $N/2$. Diese Zerlegung wird $\log_2(2^n) - 1$ Mal angewendet, bis man nur mehr Teil-DFTs der Länge 2 zu berechnen hat. Zusätzlich wird die zentrale Eigenschaft $\omega_N^2 = \omega_{N/2}$, mit $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$, verwendet.

4. **Aufgabe**

(a) i. Mit Hilfe von Nr. 18 und Nr. 19 in der Formelsammlung erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{x}(f) &= \frac{1}{2}\left(\delta\left(f+1\right)+\delta\left(f-1\right)\right)+\frac{ia}{2}\left(\delta\left(f+1\right)-\delta\left(f-1\right)\right)\\ &= \frac{1+ia}{2}\,\delta(f+1)+\frac{1-ia}{2}\,\delta(f-1).\end{aligned}$$

ii. Wir definieren

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t-nT\right),\ t\in\mathbb{R},$$

und erhalten aus Nr. 20 in der Formelsammlung

$$\widehat{\delta_T}(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{k}{T}\right). \tag{4}$$

Damit folgt unter Verwendung von Nr. 8 in der Formelsammlung

$$\begin{aligned}\hat{y}\left(f\right) &= \left(\hat{x} * \widehat{\delta_T}\right)\left(f\right)\\ &= \left[\left(\frac{1+ia}{2}\,\delta(\cdot+1)+\frac{1-ia}{2}\,\delta(\cdot-1)\right) * \left(\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\cdot-\frac{k}{T}\right)\right)\right]\left(f\right)\\ &= \frac{1+ia}{2T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}+1\right)+\frac{1-ia}{2T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}-1\right).\end{aligned}$$

iii. Für $T=1$ haben wir

$$\begin{aligned}\hat{y}\left(f\right) &= \frac{1+ia}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-k+1)+\frac{1-ia}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-k-1)\\ &= \frac{1+ia}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-k)+\frac{1-ia}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-k)\\ &= \left(\frac{1+ia}{2}+\frac{1-ia}{2}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-k\right)\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-k\right).\end{aligned}$$

Da $\hat{y}(f)$ und somit $y(t)$ von a unabhängig ist, lässt sich a nicht aus $y(t)$ bestimmen.

(b) i. Gemäss Abtasttheorem ist es möglich das Signal $z(t)$ aus seinen Abtastwerten $z(nT), n\in\mathbb{Z}$, zu rekonstruieren solange $T\leq 1/(2B)$. Hier haben wir $T=1/(3B)<1/(2B)$. Damit ist Rekonstruktion möglich und zwar gemäss der Interpolationsformel

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(nT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ii. Wir bemerken, dass $z(t)$ wegen $\hat{z}(f) = (\hat{x} * \hat{x})(f)$ ein auf $[-2B, 2B]$ bandbegrenztes Signal ist. Da

$$T = 1/(3B) > 1/(4B),$$

ist Rekonstruktion nicht möglich.

iii. Wir bemerken, dass $\hat{z}(f) = \hat{x}^2(f)$. Somit ist $z(t)$ ein auf $[-B, B]$ bandbegrenztes Signal. Aus

$$T = 1/(3B) < 1/(2B)$$

folgt, dass Rekonstruktion gemäss

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(nT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

möglich ist.

iv. Wir bemerken, dass mit Hilfe von Nr. 8 und Nr. 18 in der Formelsammlung $\hat{z}(f) = \hat{x}(f+B) + \hat{x}(f-B)$ folgt. Somit ist $z(t)$ ein auf $[-2B, 2B]$ bandbegrenztes Signal. Da

$$T = 1/(3B) > 1/(4B),$$

ist Rekonstruktion nicht möglich.