

Klausur zu Signal- und Systemtheorie I

26. Januar 2021

Bitte beachten Sie:

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung ist die Formelsammlung erlaubt, die Sie von uns erhalten. Die Benutzung von Rechnern/Smartphones/Tablets jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Aufgabenteile, die mit einem ★ gekennzeichnet sind, können unabhängig von vorhergehenden Aufgabenteilen gelöst werden.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen Sie darauf hin, dass Studierende bei unehrlichem Handeln während der Prüfung den Strafnormen der Disziplinarordnung RSETHZ 361.1 der ETHZ unterstehen.

Vor der Klausur:

1. Dieses Angabenheft hat 6 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie bitte sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein und unterschreiben Sie.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen ausschliesslich auf die bereitgestellten leeren Blätter. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie weitere Blätter. Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen.

Nach der Klausur:

5. Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen. Legen Sie alle ihre Lösungsblätter und alle Aufgabenblätter auf einem Stapel zur Abgabe bereit (ohne Formelsammlung). Alle Aufgabenblätter müssen abgegeben werden. Räumen Sie dann bitte ihr Pult auf und warten Sie, bis Sie den Raum gestaffelt Reihe für Reihe verlassen können.

Nachname: Vorname:

Legi-Nr.:

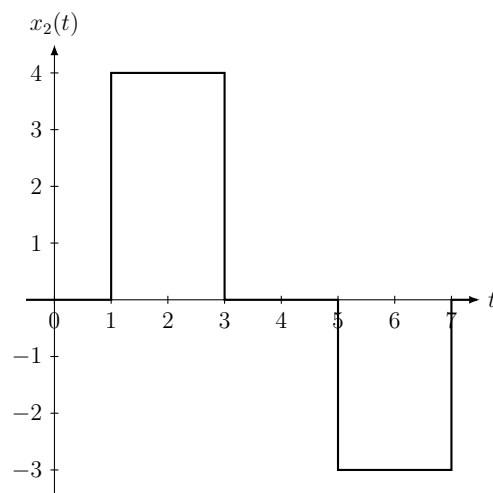
Unterschrift:

1. Aufgabe (25 Punkte)

Ein analoges LTI-System sei durch die folgende Eingangs-Ausgangsbeziehung beschrieben:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-4(t-\tau)} x(\tau) d\tau.$$

- ★ (a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems.
- ★ (b) (2 Punkte) Ist das System kausal? Begründen Sie Ihre Antwort.
- ★ (c) (2 Punkte) Ist das System BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.
- ★ (d) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Antwort des Systems auf das Eingangssignal $x_1(t) = \sigma(t) - \sigma(t - 2)$.
- ★ (e) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Antwort des Systems auf das abgebildete Signal $x_2(t)$.



Hinweis: Diese Teilaufgabe kann effizient unter Verwendung des Ergebnisses aus Teilaufgabe (d) gelöst werden.

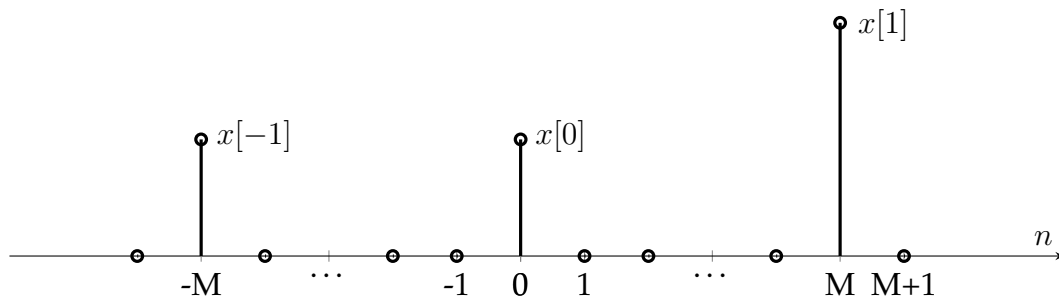
- ★ (f) (10 Punkte)
 - i. (5 Punkte) Berechnen Sie die Fourierreihenkoeffizienten $c_k, k \in \mathbb{Z}$, des 1-periodischen Signals

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < t \leq 0 \\ -1, & 0 < t \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- ii. (5 Punkte) Das Signal $x(t)$ gemäss Punkt (f)i. liegt nun am Eingang des gegebenen LTI-Systems an. Bestimmen Sie die Fourierreihenkoeffizienten $d_k, k \in \mathbb{Z}$, des resultierenden Ausgangssignals $y(t)$.

2. **Aufgabe** (25 Punkte)

In diesem Beispiel sollen die Interpolation und die Dezimation zeitdiskreter Signale untersucht werden. Der Interpolator bewerkstelligt die Interpolation eines zeitdiskreten Signals $x[n]$ um den Faktor $M \geq 2$ durch das Einfügen von je $M - 1$ Nullen zwischen zwei benachbarten Werten von $x[n]$ und zwar so, dass das zu $x[n]$ gehörige interpolierte Signal gegeben ist durch



Der Dezimator um den Faktor M ist durch die Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$y[n] = x[Mn], \quad n \in \mathbb{Z},$$

charakterisiert.

- ★ (a) (4 Punkte) Geben Sie die Eingangs-Ausgangsbeziehung des Interpolators für allgemeines M an.
- ★ (b) (8 Punkte) Wir beschreiben den Interpolator um den Faktor M durch das Symbol

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow M} \longrightarrow y[n]$$

und den Dezimator um den Faktor M durch

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow y[n]$$

Betrachten Sie nun die Systeme

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow M} \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow \boxed{\uparrow M} \longrightarrow y[n]$$

und bestimmen Sie die zugehörigen Eingangs-Ausgangsbeziehungen. Sind die Operationen der Interpolation und der Dezimation kommutativ? Begründen Sie Ihre Antwort.

- ★ (c) (3 Punkte) Ist der Dezimator linear? Begründen Sie Ihre Antwort.
- ★ (d) (3 Punkte) Ist der Dezimator kausal? Begründen Sie Ihre Antwort.
- ★ (e) (3 Punkte) Ist der Interpolator BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ (f) (4 Punkte) Ist der Interpolator zeitinvariant? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Aufgabe (25 Punkte)

Die Eingangs-Ausgangsbeziehung eines zeitdiskreten LTI-Systems ist gegeben durch

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

★ (a) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Frequenzgang $\hat{h}(\theta)$ des Systems.

★ (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h[n]$ des Systems.

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie die N -Punkt DFT $\hat{g}[k]$ des Signals

$$g[n] = \begin{cases} h[n], & n = 0, 1, \dots, N-1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $h[n]$ die Impulsantwort aus Teilaufgabe (b) bezeichnet.

Hinweis: $\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$, für $|a| < 1$.

(d) (4 Punkte) Bestimmen Sie

$$\int_0^1 |\hat{h}(\theta)|^2 d\theta,$$

wobei $\hat{h}(\theta)$ den Frequenzgang des Systems bezeichnet.

(e) (7 Punkte) Bestimmen Sie

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{g}[k]|^2.$$

(f) (6 Punkte) Bestimmen Sie nun

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{g}[k]|^2}{\int_0^1 |\hat{h}(\theta)|^2 d\theta},$$

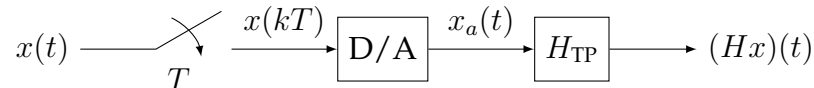
und interpretieren Sie das Ergebnis.

4. Aufgabe (25 Punkte)

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal

$$x(t) = \frac{\sin(3\pi t) \sin(2\pi t)}{(\pi t)^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Das Signal $x(t)$ liegt nun am Eingang des folgenden Systems an:



Der D/A-Wandler ist durch die Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

charakterisiert, wobei T eine positive reelle Zahl ist. Das LTI-System H_{TP} ist durch den reellwertigen Frequenzgang

$$\hat{h}_{TP}(f) = \begin{cases} b, & \text{für } |f| \leq c \\ b(c+1) - b|f|, & \text{für } c < |f| \leq c+1 \\ 0, & \text{für } |f| > c+1 \end{cases}$$

charakterisiert, wobei b und c positive reelle Parameter sind.

- ★ (a) (7 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{x}(f)$ des Signals $x(t)$ und skizzieren Sie $\hat{x}(f)$ im Bereich $-3 \leq f \leq 3$.
- (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Bandbreite f_g des Signals $x(t)$.
Hinweis: Die Bandbreite f_g ist das kleinste $W \geq 0$ so dass $\hat{x}(f) = 0$ für alle $f \in \mathbb{R}$ mit $|f| > W$ gilt.
- (c) (2 Punkte) Wie gross darf T gemäss Abtasttheorem höchstens sein, damit beim Abtasten des Signals $x(t)$ kein Aliasing entsteht?

Nehmen Sie in den folgenden Teilaufgaben $T = 1/7$ an.

- (d) (6 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{x}_a(f)$ des Signals $x_a(t)$.
- (e) (3 Punkte) Skizzieren Sie $\hat{x}_a(f)$ und den Frequenzgang $\hat{h}_{TP}(f)$ für $b = 7$ und $c = 3$ im Bereich $0 \leq f \leq 7$.
- (f) (5 Punkte) Geben Sie alle möglichen Werte der positiven Parameter b und c des Frequenzgangs $\hat{h}_{TP}(f)$ an, so dass aus dem abgetasteten Signal $x_a(t)$ das ursprüngliche Signal $x(t)$ verzerrungsfrei rekonstruiert werden kann, d.h., damit $(Hx)(t) = x(t)$ gilt.