Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Professur für Mathematische Informationswissenschaften
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Lösung zur
Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
26. Januar 2021

1. **Aufgabe**

(a) Die Impulsantwort erhält man, indem man die Eingangs-Ausgangsbeziehung umschreibt gemäss

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-4(t-\tau)} x(\tau) \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-\tau) e^{-4(t-\tau)} x(\tau) \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

und daraus $h(t) = e^{-4t}\sigma(t)$ abliest.

(b) Das System ist kausal, da $h(t) = 0$ für $t < 0$.

(c) Das System ist BIBO-stabil, da $h \in L^1$ dank

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} e^{-4t} \mathrm{d}t = -\frac{1}{4} e^{-4t} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{4} < \infty.$$

(d) Die Antwort des Systems ist gegeben durch

$$y_1(t) = (h * x_1)(t).$$

Wir haben nun

$$\begin{aligned} (\underbrace{e^{-4t}\sigma(t)}_{h(t)}) * \sigma(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\tau} \sigma(\tau) \sigma(t-\tau) \mathrm{d}\tau \\ &= \sigma(t) \int_{0}^{t} e^{-4\tau} \mathrm{d}\tau = -\frac{1}{4}(e^{-4t} - 1)\sigma(t) \\ &= \frac{\sigma(t)}{4}(1 - e^{-4t}) \end{aligned}$$

und damit, dank der Linearität und der Zeitinvarianz des Systems,

$$y_1(t) = \frac{\sigma(t)}{4}(1 - e^{-4t}) - \frac{\sigma(t-2)}{4}(1 - e^{-4(t-2)}).$$

(e) Wir bemerken zunächst, dass

$$\begin{aligned} x_2(t) &= 4[\sigma(t-1) - \sigma(t-3)] - 3[\sigma(t-5) - \sigma(t-7)] \\ &= 4x_1(t-1) - 3x_1(t-5). \end{aligned}$$

Mit dem Ergebnis $y_1(t)$ aus Teilaufgabe (d) folgt nun

$$\begin{aligned} y_2(t) = (h * x_2)(t) &= h(t) * (4x_1(t-1) - 3x_1(t-5)) \\ &= 4y_1(t-1) - 3y_1(t-5). \end{aligned}$$

(f) i. Es gilt

$$\begin{aligned} c_k &= \int_{-1/2}^{1/2} x(t)e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1/2}^{0} x(t)e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t + \int_{0}^{1/2} x(t)e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1/2}^{0} e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t - \int_{0}^{1/2} e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{1/2} e^{2\pi ikt}\mathrm{d}t - \int_{0}^{1/2} e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t \\ &= 2i\int_{0}^{1/2} \sin(2\pi kt)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $c_0 = 0$ und für $k \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} c_k &= -\left(\frac{2i}{2\pi k}\cos(2\pi kt)\right)\Bigg|_{t=0}^{t=1/2} = \\ &= \frac{i}{\pi k}\big(1 - \cos(\pi k)\big) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{2i}{\pi k}, & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

ii. Die Fourierreihenkoeffizienten von $y(t) = (h * x)(t)$ ergeben sich zu

$$d_k = c_k\,\hat{h}(k), \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

wobei c_k die Fourierreihenkoeffizienten des 1-periodischen Signals $x(t)$ aus Teilaufgabe (f)i. bezeichnet. Die Fouriertransformierte $\hat{h}(f)$ von $h(t)$ ergibt sich gemäss Gleichung 24 aus der Formelsammlung für $a = 4$ als

$$\hat{h}(f) = \frac{1}{4 + 2\pi if}.$$

Somit erhalten wir unter Zuhilfenahme von (1) und dem Ergebnis aus

Teilaufgabe (f)i.

$$d_k = \begin{cases} 0, & \text{für } k = 0 \\ 0, & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{i}{\pi k(2+\pi i k)}, & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

2. **Aufgabe**

(a) Die Eingangs-Ausgangsbeziehung des Interpolators ist gegeben durch

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{M}\right], & n = \ell M, \ell \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Zunächst betrachten wir das System

$$x[n] - \boxed{\uparrow M} - \boxed{\downarrow M} - y[n]$$

Die zugehörige Eingangs-Ausgangsbeziehung ist gegeben durch

$$y[n] = x[n], \; n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Für das System

$$x[n] - \boxed{\downarrow M} - \boxed{\uparrow M} - y[n]$$

erhalten wir die Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$y[n] = \begin{cases} x[n], & n = \ell M, \ell \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3}$$

Wir stellen fest, dass (2) und (3) für allgemeines $x[n]$ nicht identisch sind. Daraus folgt, dass die Operationen der Interpolation und der Dezimation nicht kommutativ sind.

(c) Wir setzen

$$y_1[n] = x_1[Mn], \; n \in \mathbb{Z},$$
$$y_2[n] = x_2[Mn], \; n \in \mathbb{Z},$$

und betrachten

$$x[n] := \alpha x_1[n] + \beta x_2[n], \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}.$$

Das zu $x[n]$ gehörige Ausgangssignal $y[n]$ ist gegeben durch

$$y[n] = x[Mn] = \alpha x_1[Mn] + \beta x_2[Mn],$$

und erfüllt somit

$$y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n].$$

Daraus können wir nun schliessen, dass der Dezimator linear ist.

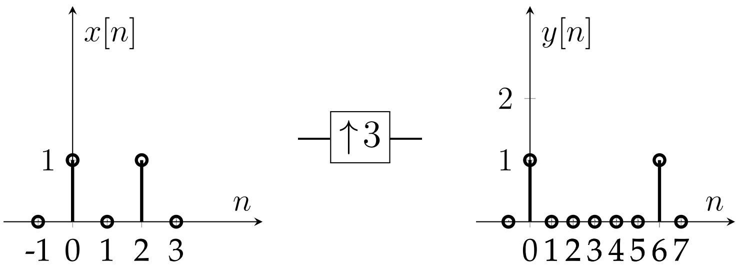
(d) Der Dezimator ist nicht kausal, weil z.B. für $M = 2$, das Ausgangssignal $y[n] = x[2n]$ für gegebenes n von zukünftigen Werten des Eingangssignals abhängt.

(e) Wenn $|x[n]| \leq B < \infty$, für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist, dann gilt auch $|y[n]| \leq B$, für alle $n \in \mathbb{Z}$, weil

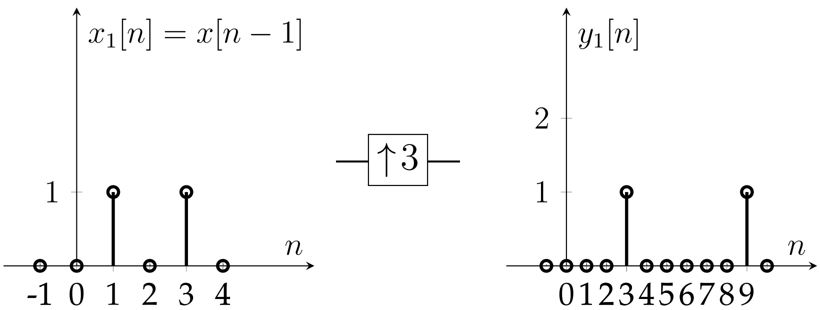
$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{M}\right], & n = \ell M, \ell \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und das System somit nur Nullen zwischen bestehenden Abtastwerten einfügt. Das System ist also BIBO-stabil.

(f) Wir nehmen z.B. $x[n] = \delta[n] + \delta[n-2]$ und $M = 3$, was zu Folgendem führt:



Dann verschieben wir $x[n]$ um einen Zeitschritt nach rechts. Dies führt zu



Da nun $y_1[n] \neq y[n-1]$, ist das System nicht zeitinvariant.

3. **Aufgabe**

(a) Unter Verwendung von Gleichung 55 in der Formelsammlung erhalten wir

$$\hat{y}(\theta) - \frac{1}{4}\hat{y}(\theta)e^{-2\pi i\theta} = \hat{x}(\theta),$$

woraus sich der Frequenzgang zu

$$\hat{h}(\theta) = \frac{\hat{y}(\theta)}{\hat{x}(\theta)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-2\pi i\theta}}$$

ergibt.

(b) Es folgt direkt aus Teilaufgabe (a) und Gleichung 73 in der Formelsammlung, dass

$$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \sigma[n].$$

(c) Mit Gleichung 76 in der Formelsammlung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\hat{g}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} g[n]e^{-2\pi ikn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]e^{-2\pi ikn/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n e^{-2\pi ikn/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{e^{-2\pi ik/N}}{4}\right)^n \\
&= \frac{1 - \left(\frac{e^{-2\pi ik/N}}{4}\right)^N}{1 - \frac{e^{-2\pi ik/N}}{4}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^N}{1 - \frac{e^{-2\pi ik/N}}{4}},
\end{aligned}$$

wobei $\sum_{a=0}^{N-1} a = \frac{1-a^N}{1-a}$, für $|a| < 1$, verwendet wurde.

(d) Die Parsevalsche Beziehung für aperiodische zeitdiskrete Signale ergibt

$$\int_0^1 |\hat{h}(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2 \tag{4}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n \tag{5}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{16}{15}, \tag{6}$$

wobei (5) aus Teilaufgabe (b) folgt und (6) aus $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} a^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1-a^N}{1-a} = \frac{1}{1-a}$, für $|a| < 1$.

(e) Wir schreiben $\hat{g}[k]$ in Matrix-Vektor Schreibweise gemäss

$$\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{F}_N \mathbf{g},$$

wobei

$$\hat{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \hat{g}[0] \\ \hat{g}[1] \\ \vdots \\ \hat{g}[N-1] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g[0] \\ g[1] \\ \vdots \\ g[N-1] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix},$$

wobei $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$. Damit erhalten wir

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{g}[k]|^2 = \frac{1}{N}\hat{\mathbf{g}}^H \hat{\mathbf{g}} = \frac{1}{N}\mathbf{g}^H \mathbf{F}_N^H \mathbf{F}_N \mathbf{g} = \mathbf{g}^H \mathbf{g} = \sum_{n=0}^{N-1} |g[n]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |h[n]|^2,$$

wobei $\mathbf{F}_N^H \mathbf{F}_N = N\mathbf{I}_N$ verwendet wurde. Dies ergibt nun,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{g}[k]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{16}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{16}\right)^N}{1-\frac{1}{16}}.$$

(f) Wir haben

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{g}[k]|^2}{\int_0^1 |\hat{h}(\theta)|^2 d\theta} = \lim_{N\to\infty} \frac{\frac{1-\left(\frac{1}{16}\right)^N}{1-\frac{1}{16}}}{\frac{16}{15}} = 1,$$

wobei die Ergebnisse aus den Teilaufgaben (d) und (e) verwendet wurden. Die Energie im Signal

$$g[n] = \begin{cases} h[n], & n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

geht für $N \to \infty$ gegen die Energie im Signal $h[n]$, weil $g[n]$ für $N \to \infty$ gegen $h[n]$ geht.

4. **Aufgabe**

(a) Wir schreiben $x(t) = u(t)v(t)$ mit

$$u(t) = \frac{\sin(3\pi t)}{\pi t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

und

$$v(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Es bezeichne nun $\hat{u}(f)$ die Fouriertransformierte des Signals $u(t)$ und $\hat{v}(f)$ die Fouriertransformierte des Signals $v(t)$. Mit Hilfe von Gleichung 27 in der Formelsammlung erhalten wir für $f_c = 3/2$

$$\hat{u}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq 3/2 \\ 0, & |f| > 3/2 \end{cases}$$

und für $f_c = 1$

$$\hat{v}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq 1 \\ 0, & |f| > 1. \end{cases}$$

Gemäss Gleichung 8 in der Formelsammlung haben wir nun

$$\begin{aligned} \hat{x}(f) &= (\hat{u} * \hat{v})(f) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\nu)\hat{v}(f-\nu)\mathrm{d}\nu \\ &= \int_{-3/2}^{3/2} \hat{v}(f-\nu)\mathrm{d}\nu. \end{aligned}$$

Die Faltung $(\hat{u} * \hat{v})(f)$ kann sowohl grafisch als auch analytisch durchgeführt werden. Wir betrachten dazu die folgenden Fallunterscheidungen:

Fall 1: $f < -5/2$. In diesem Fall erhalten wir $(\hat{u} * \hat{v})(f) = 0$, da $\hat{v}(f-\nu)$ im gesamten Integrationsbereich gleich Null ist.

Fall 2: $-5/2 \leq f < -1/2$. In diesem Fall erhalten wir

$$(\hat{u} * \hat{v})(f) \;=\; \int_{-3/2}^{f+1} \mathrm{d}\nu \;=\; f + \frac{5}{2}.$$

Fall 3: $-1/2 \leq f < 1/2$. In diesem Fall erhalten wir

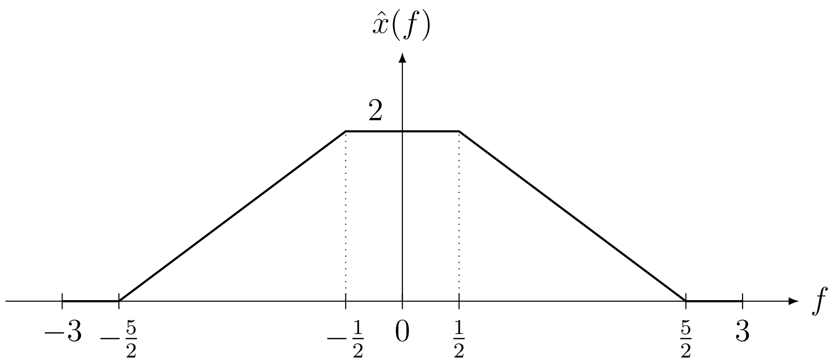
$$(\hat{u} * \hat{v})(f) \;=\; \int_{f-1}^{f+1} \mathrm{d}\nu \;=\; 2.$$

Fall 4: $1/2 \leq f < 5/2$. In diesem Fall erhalten wir

$$(\hat{u} * \hat{v})(f) \;=\; \int_{f-1}^{3/2} \mathrm{d}\nu \;=\; \frac{5}{2} - f.$$

Fall 5: $f > 5/2$. In diesem Fall erhalten wir $(\hat{u} * \hat{v})(f) = 0$, da $\hat{v}(f-\nu)$ im gesamten Integrationsbereich gleich Null ist.

Für $-3 \leq f \leq 3$ hat $\hat{x}(f)$ somit folgende Gestalt:



(b) Das Signal $x(t)$ hat Bandbreite $f_g = 5/2$.

(c) Laut Abtasttheorem muss $T \leq 1/(2f_g) = 1/5$ gelten, damit beim Abtasten kein Aliasing entsteht.

(d) Zunächst schreiben wir $x_a(t)$ in der Form

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\Big(\frac{k}{7}\Big)\, \delta\Big(t - \frac{k}{7}\Big) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\, \delta\Big(t - \frac{k}{7}\Big) && (7) \\ &= x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\Big(t - \frac{k}{7}\Big) \\ &= x(t) w(t), && (8) \end{aligned}$$

wobei wir in (7) die Siebeigenschaft der Dirac Deltafunktion verwendet haben und in (8)

$$w(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\Big(t - \frac{k}{7}\Big)$$

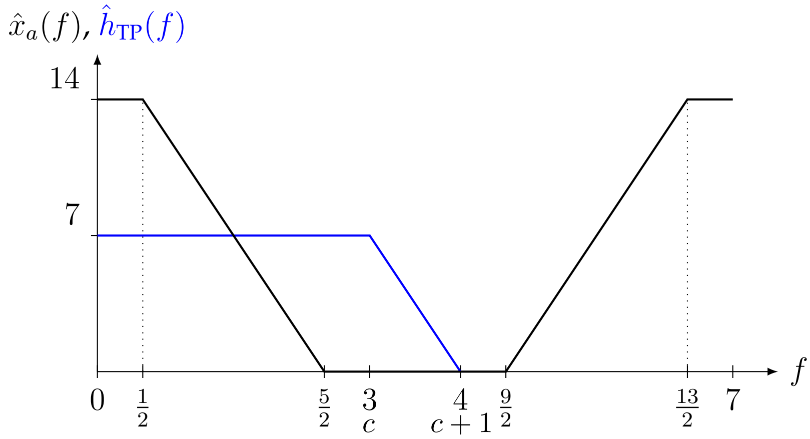
gesetzt haben. Die Fouriertransformierte $\hat{w}(f)$ von $w(t)$ ergibt sich gemäss Gleichung 20 in der Formelsammlung für $T_0 = 1/7$ als

$$\hat{w}(f) = 7 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - 7k).$$

Somit erhalten wir unter Zuhilfenahme von Gleichung 8 in der Formelsammlung

$$\begin{aligned}\hat{x}_a(f) &= (\hat{x} * \hat{w})(f) \\ &= 7 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}(f - 7k).\end{aligned}$$

(e) Für $0 \leq f \leq 7$ haben $\hat{x}_a(f)$ und $\hat{h}_{\mathrm{TP}}(f)$ für $b = 7$ und $c = 3$ folgende Gestalt:



(f) Um das ursprüngliche Signal $x(t)$ verzerrungsfrei rekonstruieren zu können, muss $\hat{x}(f) = \hat{h}_{\mathrm{TP}}(f)\hat{x}_a(f)$, für alle f gelten. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Bedingungen $b = 1/7$ und $5/2 \leq c \leq 7/2$ erfüllt sind.