Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Professur für Mathematische Informationswissenschaften
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
27. August 2021

Bitte beachten Sie:

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung ist die Formelsammlung erlaubt, die Sie von uns erhalten. Die Benutzung von Rechnern/Smartphones/Tablets jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Aufgabenteile, die mit einem ★ gekennzeichnet sind, können unabhängig von vorhergehenden Aufgabenteilen gelöst werden.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen Sie darauf hin, dass Studierende bei unehrlichem Handeln während der Prüfung den Strafnormen der Disziplinarordnung RSETHZ 361.1 der ETHZ unterstehen.

Vor der Klausur:

1. Dieses Angabenheft hat 5 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie bitte sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein und unterschreiben Sie.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen ausschliesslich auf die bereitgestellten leeren Blätter. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie weitere Blätter. Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen.

Nach der Klausur:

5. Legen Sie alle ihre Lösungsblätter und alle Aufgabenblätter auf einen Stapel zur Abgabe bereit (ohne Formelsammlung). Alle Aufgabenblätter müssen abgegeben werden. Räumen Sie dann bitte ihr Pult auf und warten Sie bis Sie den Raum gestaffelt Reihe für Reihe verlassen können.

Nachname: .... Vorname: ....

Legi-Nr.: ....

Unterschrift: ....

1. **Aufgabe** (25 Punkte)

★ (a) (12 Punkte) Gegeben sei das Signal $x(t)$ mit der Bandbreite f_0, d.h. $\hat{x}(f) = 0$ für $|f| > f_0$. Bestimmen Sie die Bandbreite der folgenden Signale. ($x(t) * y(t)$ bezeichnet die Faltung der Signale $x(t)$ und $y(t)$.)

i. (4 Punkte) $x_1(t) = \frac{\sin(10\pi t)}{7\pi t} * x(t)$

ii. (4 Punkte) $x_2(t) = \int_{-\infty}^{t/2} x(\tau) d\tau$

iii. (4 Punkte) $x_3(t) = x(t) \cos(4\pi f_0 t)$

★ (b) (13 Punkte) Der Frequenzgang eines zeitkontinuierlichen LTI-Systems ist gegeben durch

$$\hat{h}(f) = \frac{3 - 2\pi i f}{2 + 2\pi i f}.$$

i. (5 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h(t)$ dieses Systems.

ii. (3 Punkte) Bestimmen Sie das Ausgangssignal dieses Systems für das Eingangssignal $x(t) = e^{-2t}\sigma(t)$.

iii. (2 Punkte) Ist das System kausal? Begründen Sie Ihre Antwort.

iv. (3 Punkte) Betrachten Sie nun das System mit der Impulsantwort

$$g(t) = h(t) + \delta(t).$$

Ist dieses System BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. **Aufgabe** (25 Punkte) Die Impulsantwort eines zeitdiskreten LTI-Systems ist gegeben durch

$$h[n] = e^{-a^2 n}\sigma[n],$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

★ (a) (3 Punkte) Berechnen Sie den Frequenzgang dieses Systems als Funktion von a.

★ (b) (5 Punkte) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist das System BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ (c) (4 Punkte) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist das System gedächtnisbehaftet? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ (d) (3 Punkte) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist das System kausal? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ (e) (2 Punkte) Berechnen Sie nun, für allgemeines a, den Frequenzgang des Systems mit der Impulsantwort $g[n]$, die aus $h[n]$ wie folgt gewonnen wird:

$$g[n] = \begin{cases} h[n], & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei $M \in \mathbb{N}$.
Hinweis: $\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$, für $|a| < 1$.

★ (f) (3 Punkte) Berechnen Sie, für allgemeines a, das Ausgangssignal des Systems mit der Impulsantwort $g[n]$ aus Teilaufgabe (e) für das Eingangssignal

$$x[n] = 1, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

★ (g) (5 Punkte) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist das System mit der Impulsantwort $g[n]$ aus Teilaufgabe (e) BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. **Aufgabe** (25 Punkte)

★ (a) (5 Punkte) Gegeben seien N-Punkt Signale $x[n]$ und $y[n]$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, mit den N-Punkt DFTs $\hat{x}[k]$ und $\hat{y}[k]$. Ist es möglich, dass für $x[n] \neq y[n]$, die DFTs $\hat{x}[k] = \hat{y}[k]$, für alle $k = 0, 1, \ldots, N-1$, erfüllen? Wenn ja, geben Sie ein entsprechendes Beispiel an. Wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort.

★ (b) (6 Punkte) Bestimmen Sie, ob die 11-Punkt DFT der folgenden Signale reellwertig oder komplexwertig ist. Begründen Sie Ihre Antwort. Sie müssen die DFTs der Signale dazu nicht explizit berechnen. Es reicht über Eigenschaften der Signale zu argumentieren.

$$x_1 = [2, 1, 3, 4, 0, 0, 2, 2, 4, 3, 1]$$

$$x_2 = [2, 2, 3, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 3, 2]$$

$$x_3 = [5, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 5]$$

★ (c) (9 Punkte) Berechnen Sie explizit die 4-Punkt DFT der folgenden Signale:

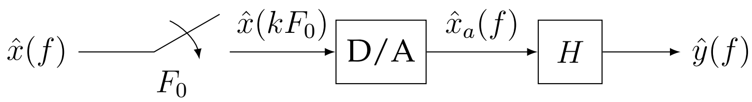
$$y_1 = [2, 0, 1, 0]$$
$$y_2 = [0, 2, 0, 1]$$
$$y_3 = [2, 0, -1, 0]$$

★ (d) (5 Punkte) Bestimmen Sie die 8-Punkt DFT des Signals $x[n] = 2 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.

4. **Aufgabe** (25 Punkte)
Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal

$$x(t) = \begin{cases} \frac{3}{2} + t, & -\frac{3}{2} \le t < -\frac{1}{2} \\ -2t, & |t| \le \frac{1}{2} \\ t - \frac{3}{2}, & \frac{1}{2} < t \le \frac{3}{2} \\ 0, & |t| > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Die Fouriertransformierte $\hat{x}(f)$ des Signals $x(t)$ liegt nun am Eingang des folgenden Systems an:



Der D/A-Wandler ist durch die Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$\hat{x}_a(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}(kF_0)\delta(f - kF_0)$$

charakterisiert, wobei F_0 eine positive reelle Zahl ist. Das LTI-System H ist durch die Faltungsoperation

$$(H\hat{x}) = (\hat{g} * \hat{x})(f)$$

mit $\hat{g}(f) = C_0 \sin(2\pi T_0 f)/(\pi f)$ gegeben, wobei C_0 und T_0 positive reelle Zahlen sind.

★ (a) (3 Punkte) Skizzieren Sie $x(t)$ im Bereich $-2 \le t \le 2$.

★ (b) (6 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{x}(f)$ des Signals $x(t)$. *Hinweis: Das Signal $x(t)$ lässt sich in der Form $x(t) = au(t - t_0) + bu(t - t_1)$ schreiben, wobei a, b, t_0 und t_1 geeignete reelle Zahlen sind und*

$$u(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

(c) (5 Punkte) Berechnen Sie die inverse Fouriertransformierte $x_a(t)$ des Signals $\hat{x}_a(f)$.

(d) (3 Punkte) Skizzieren Sie $x_a(t)$ aus Teilaufgabe (c) für $F_0 = 1/4$ im Bereich $0 \le t \le 4$.

★ (e) (4 Punkte) Berechnen Sie die inverse Fouriertransformierte $y(t)$ des Signals $\hat{y}(f)$ als Funktion des Signals $x_a(t)$.

(f) (4 Punkte) Für welche Werte von F_0, T_0 und C_0 gilt $\hat{y}(f) = \hat{x}(f)$, für alle $f \in \mathbb{R}$?