

# Lösung zur Klausur zu Signal- und Systemtheorie I 27. August 2021

## 1. Aufgabe

- (a) i. Wir bemerken zunächst, dass gemäss Gleichung 27 der Formelsammlung die Fouriertransformation von

$$w(t) := \frac{\sin(10\pi t)}{7\pi t}$$

gegeben ist durch

$$\hat{w}(f) = \begin{cases} 1/7, & |f| \leq 5 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus Gleichung 7 der Formelsammlung folgt daher

$$\hat{x}_1(f) = \begin{cases} \frac{\hat{x}(f)}{7}, & |f| \leq \min(5, f_0) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Bandbreite von  $x_1(t)$  ist daher gegeben durch  $\min(5, f_0)$ .

- ii. Wir setzen

$$w(t) := x_2(2t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau.$$

Gemäss Gleichung 15 der Formelsammlung erhalten wir

$$\hat{w}(f) = \frac{1}{2\pi i f} \hat{x}(f) + \frac{1}{2} \hat{x}(0) \delta(f),$$

so dass die Bandbreite von  $w(t)$  gleich  $f_0$  ist. Des Weiteren folgt aus Gleichung 6 der Formelsammlung, dass

$$\hat{w}(f) = \frac{1}{2} \hat{x}_2\left(\frac{f}{2}\right),$$

und daher  $\hat{x}_2(f) = 2\hat{w}(2f)$ . Die Bandbreite von  $x_2(t)$  ergibt sich somit zu  $\frac{f_0}{2}$ .

iii. Aus den Gleichungen 8 und 18 der Formelsammlung folgt

$$\hat{x}_3(f) = \frac{1}{2} (\hat{x}(f + 2f_0) + \hat{x}(f - 2f_0)).$$

Die Bandbreite von  $\hat{x}_3(t)$  ist daher gleich  $3f_0$ .

(b) i. Beachten Sie, dass

$$\hat{h}(f) = \frac{3 - 2\pi if}{2 + 2\pi if} = \frac{-2 - 2\pi if}{2 + 2\pi if} + \frac{5}{2 + 2\pi if} = -1 + \frac{5}{2 + 2\pi if}.$$

Gemäss Gleichungen 16 und 24 der Formelsammlung ist daher

$$h(t) = -\delta(t) + 5e^{-2t}\sigma(t).$$

ii. Beachten Sie, dass gemäss Gleichung 24 der Formelsammlung

$$\hat{x}(f) = \frac{1}{2 + 2\pi if},$$

und daher

$$\hat{y}(f) = \hat{h}(f) \hat{x}(f) = \frac{-1}{2 + 2\pi if} + \frac{5}{(2 + 2\pi if)^2}.$$

Aus den Gleichungen 24 und 25 der Formelsammlung folgt daher

$$y(t) = 5te^{-2t}\sigma(t) - e^{-2t}\sigma(t).$$

iii. Für die Impulsantwort

$$h(t) = -\delta(t) + 5e^{-2t}\sigma(t),$$

gilt  $h(t) = 0, \forall t < 0$ . Das System ist daher kausal.

iv. Da die Impulsantwort absolut integrierbar ist gemäss

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t) + \delta(t)| dt = \int_0^{\infty} 5e^{-2t} dt = 5/2,$$

ist das System BIBO-stabil.

## 2. Aufgabe

(a) Aus Gleichung 73 der Formelsammlung folgt

$$\hat{h}(\theta) = \frac{1}{1 - e^{-a^2} e^{-2\pi i \theta}}.$$

(b) Für  $a = 0$  erhalten wir die Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n - k].$$

Daraus folgt nun, dass das System auf das Eingangssignal  $x[n] = 1, \forall n \geq 0$ , mit  $y[n] = n + 1, n \geq 0$ , antwortet. Daher führt ein beschränktes Eingangssignal zu einem unbeschränkten Ausgangssignal, was impliziert, dass das System für  $a = 0$  nicht BIBO-stabil ist. Für  $a \neq 0$ , gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-a^2 n} < \infty,$$

und damit ist das System für alle  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ , BIBO-stabil.

(c) Die Eingangs-Ausgangsbeziehung des Systems ist gegeben durch

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a^2 k} x[n - k].$$

Daraus folgt, dass das Ausgangssignal des Systems zum Zeitpunkt  $n_0$  von  $x[n_0]$  sowie von Werten von  $x[n]$  für  $n < n_0$  abhängt. Das System ist damit für alle  $a \in \mathbb{R}$  gedächtnisbehaftet.

(d) Für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $h[n] = 0$ , für alle  $n < 0$ . Daraus folgt, dass das System für alle  $a \in \mathbb{R}$  kausal ist.

(e)

$$\hat{g}(\theta) = \sum_{n=0}^M e^{-a^2 n} e^{-2\pi i n \theta} = \sum_{n=0}^M e^{-(a^2 + 2\pi i \theta)n} = \frac{1 - e^{-(a^2 + 2\pi i \theta)(M+1)}}{1 - e^{-(a^2 + 2\pi i \theta)}}$$

(f)

$$y[n] = g[n] * x[n] = \sum_{k=0}^M e^{-a^2 k} x[n - k] = \sum_{k=0}^M e^{-a^2 k} = \frac{1 - e^{-a^2(M+1)}}{1 - e^{-a^2}}.$$

(g) Beachten Sie, dass

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |g[n]| = \sum_{n=0}^M e^{-a^2 n} < \infty, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Somit ist das System für alle  $a \in \mathbb{R}$  BIBO-stabil.

### 3. Aufgabe

(a) Nehmen wir an, dass  $\hat{x}[k] = \hat{y}[k]$ , für alle  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ . Damit folgt

$$\mathbf{F}_N \mathbf{x} = \mathbf{F}_N \mathbf{y},$$

wobei  $\mathbf{F}_N$  die  $N \times N$  DFT-Matrix ist und  $\mathbf{x} = [x[0] \ x[1] \ \dots \ x[N - 1]]^T$ ,  $\mathbf{y} = [y[0] \ y[1] \ \dots \ y[N - 1]]^T$ . Daraus würde folgen

$$\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{F}_N(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Damit (1) für  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  erfüllt sein kann, müsste das Signal  $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  im Nullraum  $\mathcal{N}(\mathbf{F}_N)$  der Matrix  $\mathbf{F}_N$  liegen. Da  $\mathbf{F}_N$  aber eine unitäre Matrix ist, gilt  $\mathcal{N}(\mathbf{F}_N) = \{\mathbf{0}\}$ . Somit kann (1) nur für  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  gelten und daher haben wir

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} \neq \hat{\mathbf{y}}.$$

(b) Aus Gleichung 80 der Formelsammlung folgt

$$\hat{x}[k] = \hat{x}^*[k] \Rightarrow x[n] = x^*[-n].$$

Für  $N = 11$  bedeutet dies (dank der  $N$ -Periodizität von  $x[n]$ )

$$x[n] = x^*[11 - n], \quad \text{für } n = 0, 1, \dots, 10.$$

Wir wenden diese allgemeine Bedingung nun auf  $x_1[n], x_2[n], x_3[n]$  an. Für  $x_1[n]$  gilt

$$x_1[4] = 0 \neq x_1^*[7] = 2,$$

und damit ist  $\hat{x}_1[k]$  komplexwertig.

Für  $x_2[n]$  erhalten wir

$$x_2[0] = x_2^*[11] = x_2^*[0] = 2,$$

$$x_2[1] = x_2^*[10] = 2,$$

$$x_2[2] = x_2^*[9] = 3,$$

$$x_2[3] = x_2^*[8] = 1,$$

$$x_2[4] = x_2^*[7] = 1,$$

$$x_2[5] = x_2^*[6] = 0,$$

und damit ist  $\hat{x}_2[k]$  reellwertig.

Für  $x_3[n]$  ergibt sich

$$x_3[1] = 2 \neq x_3^*[10] = 5,$$

und damit ist  $\hat{x}_3[k]$  komplexwertig.

(c)

$$\hat{y}_1[k] = \sum_{n=0}^3 y_1[n] e^{-2\pi i k n / 4} = 2 + (-1)^k, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

d.h.

$$\hat{y}_1 = [3, 1, 3, 1].$$

Für  $y_2[n]$  beachten wir, dass  $y_2[n] = y_1[n-1]$ , wobei die Verschiebung  $y_1[n-1]$  zyklisch ist, d.h. unter Berücksichtigung der Periodizität des Signals  $y_1[n]$  stattfindet. Damit folgt aus Gleichung 77 der Formelsammlung

$$\hat{y}_2[k] = e^{-2\pi i k / 4} \hat{y}_1[k],$$

d.h.

$$\hat{y}_2 = [3, -i, -3, i].$$

Für  $y_3[n]$  erkennen wir, dass  $y_3[n] = e^{2\pi i n / 4} y_1[n]$ . Damit folgt aus Gleichung 78 der Formelsammlung

$$\hat{y}_3[k] = \hat{y}_1[k-1],$$

wobei die Verschiebung  $\hat{y}_1[k-1]$  wieder zyklisch ist. Somit erhalten wir  $\hat{y}_3 = [1, 3, 1, 3]$ .

(d)

$$x[n] = 2 \left( 1 - \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} n \right) \right) = 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} n \right) = 1 + \cos(\pi n),$$

wobei wir

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2},$$

verwendet haben. Anwendung der Gleichungen 87 und 88 der Formelsammlung ergibt nun

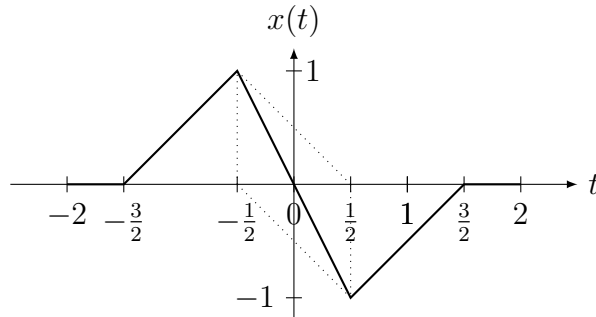
$$\hat{x}[k] = 8 \delta[k] + 4 \delta[k-4] + 4 \delta[k-4] = 8 \delta[k] + 8 \delta[k-4],$$

d.h.

$$\hat{x} = [8, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0].$$

#### 4. Aufgabe

(a) Für  $t \in [-2, 2]$  hat  $x(t)$  folgende Gestalt:



(b) Wir schreiben  $x(t) = u(t + 1/2) - u(t - 1/2)$  mit

$$u(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Es bezeichne nun  $\hat{u}(f)$  die Fouriertransformierte des Signals  $u(t)$ . Mit Hilfe von Gleichung 29 der Formelsammlung erhalten wir für  $T_0 = 1$

$$\hat{u}(f) = \frac{\sin^2(\pi f)}{\pi^2 f^2}.$$

Unter Zuhilfenahme der Linearität der Fouriertransformation und Gleichung 2 der Formelsammlung für  $t_0 = -1/2$  und  $t_0 = 1/2$  erhalten wir schliesslich

$$\begin{aligned} \hat{x}(f) &= e^{\pi i f} \hat{u}(f) - e^{-\pi i f} \hat{u}(f) \\ &= \frac{2i \sin^3(\pi f)}{\pi^2 f^2}. \end{aligned}$$

(c) Zunächst schreiben wir  $\hat{x}_a(f)$  in der Form

$$\hat{x}_a(f) = \hat{x}(f) \hat{w}(f)$$

mit

$$\hat{w}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kF_0).$$

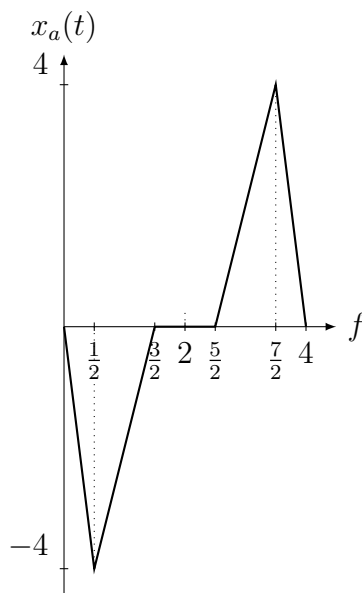
Die inverse Fouriertransformierte  $w(t)$  von  $\hat{w}(f)$  ergibt sich gemäss Gleichung 20 der Formelsammlung für  $T_0 = 1/F_0$  als

$$w(t) = \frac{1}{F_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{k}{F_0}\right).$$

Somit folgt durch Anwendung von Gleichung 7 der Formelsammlung

$$x_a(t) = (x * w)(t) = \frac{1}{F_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(t - \frac{k}{F_0}\right). \quad (2)$$

(d) Für  $F_0 = 1/4$  und  $0 \leq t \leq 4$  hat  $x_a(t)$  folgende Gestalt:



(e) Es sei  $g(t)$  die inverse Fouriertransformierte von  $\hat{g}(f)$ . Mit Hilfe von Gleichung 28 der Formelsammlung erhalten wir

$$g(t) = \begin{cases} C_0, & |t| \leq T_0 \\ 0, & |t| > T_0. \end{cases}$$

Gleichung 8 aus der Formelsammlung ergibt nun  $y(t) = g(t) x_a(t)$ . Folglich erhalten wir

$$y(t) = \begin{cases} C_0 x_a(t), & |t| \leq T_0 \\ 0, & |t| > T_0. \end{cases}$$

(f) Wir brauchen  $F_0 \leq 1/3$  (damit keine Überlappungen im Signal  $x_a(t)$  auftreten) und  $C_0 = F_0$  (um den Faktor  $1/F_0$  in (2) zu kompensieren). Die Wahl  $3/2 \leq T_0 \leq 1/F_0 - 3/2$  garantiert schliesslich, dass  $y(t)$  nur „eine“ Kopie von  $x(t)$  enthält und somit  $y(t) = x(t)$ , für alle  $t \in \mathbb{R}$ , und damit  $\hat{y}(f) = \hat{x}(f)$ , für alle  $f \in \mathbb{R}$ , gilt.