Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Professur für Mathematische Informationswissenschaften
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
3. Februar 2022

Bitte beachten Sie:

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung ist die Formelsammlung erlaubt, die Sie von uns erhalten. Die Benutzung von Rechnern/Smartphones/Tablets jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Aufgabenteile, die mit einem ★ gekennzeichnet sind, können unabhängig von vorhergehenden Aufgabenteilen gelöst werden.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen darauf hin, dass Sie der "Disziplinarverordnung ETH Zürich" unterstehen.

Vor der Klausur:

1. Dieses Angabenheft hat 6 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie bitte sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein und unterschreiben Sie.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen ausschliesslich auf die bereitgestellten leeren Blätter. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie weitere Blätter. Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen.

Nach der Klausur:

5. Legen Sie alle ihre Lösungsblätter und alle Aufgabenblätter auf einen Stapel zur Abgabe bereit (ohne Formelsammlung). Alle Aufgabenblätter müssen abgegeben werden. Räumen Sie dann bitte ihr Pult auf und warten Sie bis Sie den Raum gestaffelt Reihe für Reihe verlassen können.

Nachname: .... Vorname: ....

Legi-Nr.: ....

Unterschrift: ....

Aufgabe 1

(a) Betrachten Sie das zeitkontinuierliche LTI-System mit der Impulsantwort $h(t) = t^2\delta(t - t_0)$, wobei $t_0 \in \mathbb{R}$.

★ i. Für welche Werte von $t_0 \in \mathbb{R}$ ist das System kausal, BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antworten.

★ ii. Berechnen Sie den Frequenzgang $\hat{h}(f)$ des Systems und beschreiben Sie die Filtercharakteristik, d.h., handelt es sich um einen Tiefpass, Hochpass, oder Allpass. Bestimmen Sie den Betragsfrequenzgang und den Phasenfrequenzgang des Systems.

(b) Der Frequenzgang des Cosinustiefpass ist gegeben durch

$$\hat{h}(f) = \begin{cases} \left[a + b\cos\left(\frac{n\pi f}{f_g}\right)\right] e^{-i2\pi f t_0}, & |f| \leq f_g \\ 0, & |f| > f_g \end{cases}, \tag{1}$$

wobei $t_0, a, b, f_g \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$.

★ i. Stellen Sie $|\hat{h}(f)|$ für $n = 1$, $a = 3$, $b = 1$ und $f_g \in \mathbb{R}$ graphisch dar (skizzenhaft).

★ ii. Berechnen Sie die Impulsantwort des Systems (1) für allgemeine $t_0, a, b, f_g \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$.

★ (c) Wir betrachten den idealisierten Tiefpass mit Phasenverzerrungen. Konkret, sei $\hat{h}(f) = |\hat{h}(f)|e^{i\varphi(f)}$, wobei

$$|\hat{h}(f)| = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_g \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \tag{2}$$

und $\varphi(f)$ ist im Intervall $[-f_g, f_g]$ durch eine Fourier-Reihe gemäss

$$\varphi(f) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{f_g} f\right), \quad |f| < f_g\ ,$$

gegeben. Berechnen Sie die Impulsantwort des Systems für kleine Phasenschwankungen (d.h. für $|\varphi(f)| \ll 1, \forall f \in [-f_g, f_g]$).

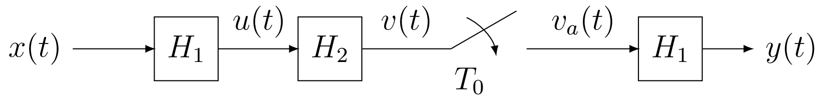
Hinweis: Entwickeln Sie $e^{i\varphi(f)}$ in eine Taylorreihe nach $\varphi(f)$ und brechen Sie diese nach dem linearen Term ab.

Aufgabe 2

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal

$$x(t) = \frac{1}{1 + 2it - t^2},$$

welches am Eingang des folgenden Systems anliegt:



Das System H_1 ist ein Tiefpassfilter mit Frequenzgang

$$\hat{h}_1(f) = \begin{cases} 1, & \text{für } |f| \leq \alpha \\ 0, & \text{für } |f| > \alpha, \end{cases}$$

wobei α eine strikt positive reelle Zahl ist. H_2 ist ein LTI-System mit Frequenzgang

$$\hat{h}_2(f) = -\frac{1}{4\pi^2 f} e^{-2\pi f}, \quad \text{für alle } f \in \mathbb{R}.$$

Abtastung des Signals $v(t)$ mit der Abtastperiode $T > 0$ ergibt das zeitkontinuierliche Signal

$$v_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT_0)\delta(t - kT_0),$$

wobei T_0 eine strikt positive reelle Zahl ist.

★ (a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{x}(f)$ des Signals $x(t)$.

Hinweis: Schreiben Sie den Nenner des Ausdrucks für $x(t)$ in der Form $(a + bt)^2$, wobei a eine reelle und b eine komplexe Zahl ist.

(b) Wir wollen nun feststellen, wie gross α sein muss, damit das Signal $u(t)$ genau die Hälfte der Energie des Signals $x(t)$ besitzt. Berechnen Sie dazu die Energie $E_u(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2$ des Signals $u(t)$ in Abhängigkeit von α und die Energie $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2$ des Signals $x(t)$. Welche Gleichung muss α erfüllen, damit $E_u(\alpha) = \frac{1}{2} E_x$ gilt?

Hinweis: Verwenden Sie die Parsevalsche Beziehung und integrieren Sie zwei Mal partiell. Sie müssen den Wert für α nicht explizit berechnen, sondern nur die Gleichung bestimmen, die α erfüllen muss!

(c) Die Bandbreite des Signals $u(t)$ ist die kleinste positive Zahl B sodass $\hat{u}(f) = 0$ für alle $f \in \mathbb{R}$ mit $|f| > B$ gilt. Berechnen Sie B.

(d) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{v}(f)$ des Signals $v(t)$.

(e) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{v}_a(f)$ des Signals $v_a(t)$. Welche Bedingung müssen α und T_0 erfüllen, damit $T_0 \hat{v}_a(f) = \hat{v}(f)$, für alle $f \in (-\alpha, \alpha)$, gilt?

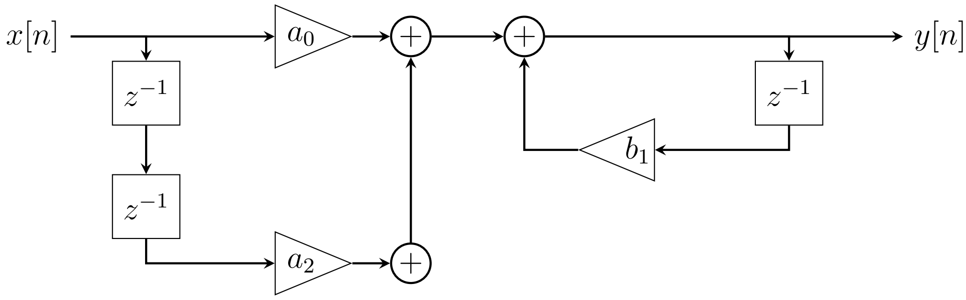
(f) Berechnen Sie das Signal $y(t)$ am Ausgang des Systems für den Spezialfall $\alpha = 1$ und $T_0 = 1/2$.

Aufgabe 3

(a) Gegeben sei ein zeitdiskretes LTI-System mit Frequenzgang

$$\widehat{h}(\theta) = \frac{12 + 2e^{-4\pi i\theta}}{4 + e^{-2\pi i\theta}}, \qquad \theta \in [0, 1).$$

★ i. Zeigen Sie, dass das System mit folgendem Blockschaltbild dargestellt werden kann, und bestimmen Sie die zugehörigen Werte für a_0, a_2 und b_1.



★ ii. Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems.

(b) Wir betrachten nun das zeitdiskrete System H mit der folgenden Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$y[n] = ax[n] + b^n x[n-1],$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

★ i. Für welche Werte von a, b ist das System linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ ii. Für welche Werte von a, b ist das System zeitinvariant? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ iii. Für welche Werte von a, b ist das System BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4

(a) ★ i. Beweisen Sie Gleichung 77 aus der Formelsammlung, d.h., dass für $N_0 \in \mathbb{N}$ die DFT von $x[n-N_0]$ gegeben ist durch $e^{-2\pi i k N_0/N}\hat{x}[k]$, wobei $\hat{x}[k]$ die DFT von $x[n]$ bezeichnet.

★ ii. Beweisen Sie Gleichung 83 aus der Formelsammlung, d.h., dass die DFT $\hat{x}_e[k]$ von $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$ gegeben ist durch $\mathfrak{Re}\{\hat{x}[k]\}$, wobei $\hat{x}[k]$ die DFT von $x[n]$ bezeichnet, und $\mathfrak{Re}$ für den Realteil einer komplexen Zahl steht.

★ (b) Berechnen Sie explizit die 3-Punkt DFT des Signals $y_1 = [\frac{1}{w}, 1, w]$, wobei $w = e^{2\pi i/3}$. Verwenden Sie dieses Ergebnis um zu schliessen, dass die 3-Punkt DFT des Signals $y_2 = [\cos(\frac{4\pi}{3}), 1, \cos(\frac{2\pi}{3})]$ gegeben ist durch $\hat{y}_2 = [0, \frac{3}{2}w^2, \frac{3}{2}w]$.

Hinweis: $w^3 = 1$.

(c) ★ i. Aus einem N-Punkt Signal $x[n]$, $n = 0, \ldots, N-1$, wird das $3N$-Punkt Signal

$$y = [\underbrace{x[0]\ x[1] \cdots x[N-1]}_{x[n]}\ \underbrace{x[0]\ x[1] \cdots x[N-1]}_{x[n]}\ \underbrace{x[0]\ x[1] \cdots x[N-1]}_{x[n]}]$$

gebildet. Berechnen Sie die $3N$-Punkt DFT $\hat{y}[k]$ als Funktion der N-Punkt DFT $\hat{x}[k]$.

★ ii. Betrachten Sie die $3N$-Punkt DFT

$$\hat{y}[k] = \begin{cases} 3\hat{x}\left[\frac{k}{3}\right], & \text{wenn } k = 3m \text{ mit } m \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\hat{x}[k]$ die N-Punkt DFT des N-Punkt Signals $x[n]$ bezeichnet. Berechnen Sie das zu $\hat{y}[k]$ gehörige ($3N$-Punkt) Zeitsignal $y[n]$.