Lösung zur
Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
3. Februar 2022

Aufgabe 1

(a) i. Wir realisieren, dass $h(t) = t^2\,\delta(t-t_0) = t_0^2\,\delta(t-t_0)$ gilt. Daraus folgt die Eingangs-Ausgangsbeziehung des Systems gemäss

$$y(t) = t_0^2\,x(t-t_0).$$

Das System ist somit kausal für alle $t_0 \geq 0$. Für jedes $x(t)$ mit $|x(t)| \leq B_x < \infty$, für alle t, gilt, $|y(t)| = t_0^2\,|x(t-t_0)| \leq t_0^2 B_x < \infty$, für alle t. Das System ist somit BIBO-stabil für alle $t_0 \in \mathbb{R}$.

ii.

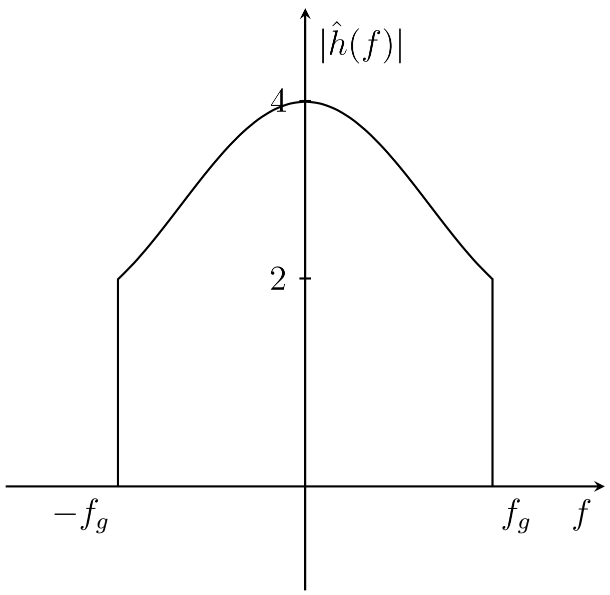
$$\hat{h}(f) = t_0^2\,e^{-2\pi i f t_0} = |\hat{h}(f)|e^{i\phi(f)},\ \text{mit}$$

$$|\hat{h}(f)| = t_0^2\,, \qquad \phi(f) = -2\pi f t_0\,.$$

Es handelt sich um einen Allpass mit linearer Phase.

(b) i.

$$|\hat{h}(f)| = \begin{cases} \left[3 + \cos\left(\frac{\pi f}{f_g}\right)\right], & |f| \leq f_g \\ 0, & |f| > f_g \end{cases}$$



ii.

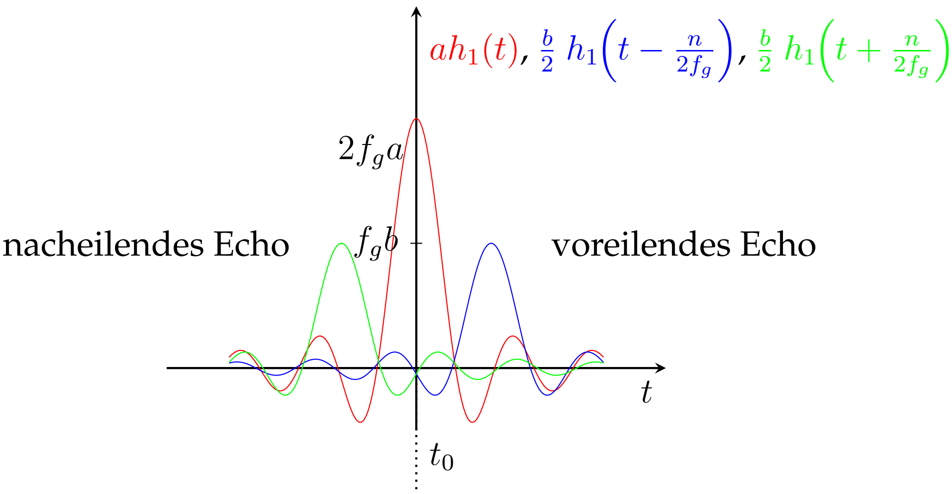
$$\hat{h}(f) = \left(a + \frac{b}{2}\, e^{i\frac{n\pi}{f_g} f} + \frac{b}{2}\, e^{-i\frac{n\pi}{f_g} f}\right) p_{[-f_g, f_g]}(f) e^{-i2\pi f t_0}$$

wobei $p_{[-f_g,f_g]}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \le f_g \\ 0, & |f| > f_g \end{cases}.$

Aus den Gleichungen 27 und 2 der Formelsammlung folgt

$$h(t) = \frac{b}{2}\, h_1\!\left(t + \frac{n}{2f_g}\right) + a h_1(t) + \frac{b}{2}\, h_1\!\left(t - \frac{n}{2f_g}\right)$$

mit $h_1(t) = \frac{\sin(2\pi f_g (t - t_0))}{\pi (t - t_0)}$.



(c) Die Taylorreihe von $e^{i\varphi(f)}$ abgebrochen nach dem linearen Term ist gegeben durch

$$\begin{aligned} e^{i\varphi(f)} &\approx 1 + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{f_g} f\right) \\ &\approx 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{2} e^{i\frac{n\pi}{f_g} f} - \frac{b_n}{2} e^{-i\frac{n\pi}{f_g} f}\right). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\hat{h}(f) \approx p_{[-f_g,f_g]}(f) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{2} e^{i\frac{n\pi}{f_g} f} - \frac{b_n}{2} e^{-i\frac{n\pi}{f_g} f}\right)\right].$$

Aus den Gleichungen 27 und 2 der Formelsammlung folgt nun

$$h(t) \approx h_2(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{2}\, h_2\!\left(t + \frac{n}{2f_g}\right) - \frac{b_n}{2}\, h_2\!\left(t - \frac{n}{2f_g}\right)\right)$$

mit $h_2(t) = \frac{\sin(2\pi f_g t)}{\pi t}$.

Aufgabe 2

(a) Wir schreiben $x(t)$ zunächst in der Form

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{(1+it)^2} \\ &= \frac{4\pi^2}{(2\pi + 2\pi i t)^2}. \end{aligned}$$

Somit folgt durch Anwendung von Gleichung 25 der Formelsammlung für $n = 2$ und $a = 2\pi$ und unter Zuhilfenahme der Dualität der Fouriertransformation (gemäss $\hat{x}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, x(-f)$), dass

$$\hat{x}(f) = -4\pi^2 f e^{2\pi f} \sigma(-f).$$

(b) Wir berechnen zuerst die Energie $E_u(\alpha)$ des Signals $u(t)$ für beliebiges $\alpha \in (0, \infty)$. Es gilt

$$\begin{aligned} E_u(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(f)|^2 \mathrm{d}f \qquad (1) \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} |\hat{x}(f)|^2 \mathrm{d}f \\ &= 16\pi^4 \int_{-\alpha}^{0} f^2 e^{4\pi f} \mathrm{d}f, \end{aligned}$$

wobei wir in (1) die Parsevalsche Beziehung verwendet haben. Durch zweimalige partielle Integration erhalten wir schliesslich

$$\begin{aligned} E_u(\alpha) &= 16\pi^4 \int_{-\alpha}^{0} f^2 e^{4\pi f} \mathrm{d}f \\ &= 4\pi^3 f^2 e^{4\pi f} \Big|_{-\alpha}^{0} - 8\pi^3 \int_{-\alpha}^{0} f e^{4\pi f} \mathrm{d}f \\ &= -4\pi^3 \alpha^2 e^{-4\pi\alpha} - 2\pi^2 \left(f e^{4\pi f} \Big|_{-\alpha}^{0} - \int_{-\alpha}^{0} e^{4\pi f} \mathrm{d}f \right) \\ &= -4\pi^3 \alpha^2 e^{-4\pi\alpha} - 2\pi^2 \alpha e^{-4\pi\alpha} + \frac{\pi}{2} e^{4\pi f} \Big|_{-\alpha}^{0} \\ &= \frac{\pi}{2} - e^{-4\pi\alpha} \left(4\pi^3 \alpha^2 + 2\pi^2 \alpha + \frac{\pi}{2} \right), \quad \text{für alle } \alpha \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Die Energie des Signals $x(t)$ ergibt sich aus der Beziehung

$$E_x = E_u(\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Damit $E_u(\alpha) = \frac{1}{2} E_x$ gilt, muss α folglich die Beziehung

$$e^{4\pi\alpha} = 16\pi^2 \alpha^2 + 8\pi\alpha + 2$$

erfüllen.

(c) Da $\hat{x}(f) \neq 0$ für alle $f \in (-\infty, 0)$ gilt, folgt aus $\hat{u}(f) = \hat{h}_1(f)\hat{x}(f)$, dass die Bandbreite B des Signals $u(t)$ gleich α ist.

(d) Die Fouriertransformierte $\hat{v}(f)$ des Signals $v(t)$ ist

$$\begin{aligned}\hat{v}(f) &= \hat{h}_2(f)\hat{u}(f)\\ &= -\frac{1}{4\pi^2 f} e^{-2\pi f}\hat{u}(f)\\ &= \begin{cases} 1, & \text{für } -\alpha \leq f \leq 0\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}\end{aligned}$$

(e) Zunächst schreiben wir $v_a(t)$ in der Form

$$v_a(t) = v(t)w(t),$$

mit

$$w(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0).$$

Die Fouriertransformierte $\hat{w}(f)$ von $w(t)$ ergibt sich gemäss Gleichung 20 der Formelsammlung als

$$\hat{w}(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right).$$

Somit folgt durch Anwendung von Gleichung 8 der Formelsammlung

$$\hat{v}_a(f) = (\hat{v} * \hat{w})(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{v}\left(f - \frac{k}{T_0}\right).$$

Damit $T_0\, \hat{v}_a(f) = \hat{v}(f)$, für alle $f \in (-\alpha, \alpha)$, gilt, muss die Bedingung $1/T_0 \geq 2\alpha$ erfüllt sein.

(f) Für den Spezialfall $\alpha = 1$ und $T_0 = 1/2$ ist

$$\begin{aligned}\hat{y}(f) &= \frac{1}{T_0}\hat{v}(f) = 2\hat{v}(f)\\ &= \begin{cases} 2, & \text{für } -1 \leq f \leq 0\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}\end{aligned}$$

Gleichung 27 in der Formelsammlung ausgewertet für $f_c = 1/2$ und kombiniert mit Gleichung 3 für $f_0 = -1/2$ ergibt

$$y(t) = \frac{2\sin(\pi t)}{\pi t}\, e^{-\pi i t}.$$

Aufgabe 3

(a) i. Aus der Eingangs-Ausgangsbeziehung dargestellt im Frequenzbereich durch

$$\widehat{y}(\theta) = \widehat{x}(\theta)\,\widehat{h}(\theta) = \widehat{x}(\theta)\,\frac{12 + 2e^{-4\pi i\theta}}{4 + e^{-2\pi i\theta}},$$

folgt,

$$4\,\widehat{y}(\theta) + e^{-2\pi i\theta}\,\widehat{y}(\theta) = 12\,\widehat{x}(\theta) + 2e^{-4\pi i\theta}\widehat{x}(\theta).$$

Daraus folgt nun unter Verwendung von Gleichung 55 aus der Formelsammlung

$$4y[n] + y[n-1] = 12x[n] + 2x[n-2].$$

Dies schreiben wir um gemäss

$$y[n] = 3x[n] + \frac{1}{2}x[n-2] - \frac{1}{4}y[n-1].$$

Letztlich können wir daraus ablesen, dass das Blockschaltbild in der Angabe, mit

$$a_0 = 3, \quad a_2 = \frac{1}{2},\ b_1 = -\frac{1}{4},$$

das System darstellt.

ii. Wir schreiben den Frequenzgang wie folgt

$$\begin{aligned}\widehat{h}(\theta) &= \frac{12 + 2e^{-4\pi i\theta}}{4 + e^{-2\pi i\theta}} = \frac{3 + \frac{1}{2}e^{-4\pi i\theta}}{1 - (-\frac{1}{4})e^{-2\pi i\theta}} \\ &= 3\,\frac{1}{1 - (-\frac{1}{4})e^{-2\pi i\theta}} + \frac{1}{2}\,e^{-4\pi i\theta}\frac{1}{1 - (-\frac{1}{4})e^{-2\pi i\theta}}.\end{aligned}$$

Aus Gleichung 73 in der Formelsammlung, erhalten wir

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^n \sigma[n] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{1 - (-\frac{1}{4})e^{-2\pi i\theta}},$$

was in Kombination mit Gleichung 55 in der Formelsammlung zu

$$h[n] = 3\left(-\frac{1}{4}\right)^n \sigma[n] + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2} \sigma[n-2],$$

führt.

(b) i. Ein System H ist linear, wenn für alle Signale $x_1[\cdot], x_2[\cdot]$ und alle $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$H(\lambda x_1 + \beta x_2) = \lambda H x_1 + \beta H x_2.$$

Seien $x_1[\cdot], x_2[\cdot]$ beliebige Eingangssignale und $y_1 = Hx_1$, $y_2 = Hx_2$ die zugehörigen Ausgangssignale. Wir definieren $x := \lambda x_1 + \beta x_2$ und betrachten das zugehörige Ausgangssignal $y = Hx$. Es gilt

$$\begin{aligned}
y[n] &= ax[n] + b^n x[n-1] && (2)\\
&= a(\lambda x_1[n] + \beta x_2[n]) + b^n(\lambda x_1[n-1] + \beta x_2[n-1]) && (3)\\
&= \lambda(ax_1[n] + b^n x_1[n-1]) + \beta(ax_2[n] + b^n x_2[n-1]) && (4)\\
&= \lambda y_1[n] + \beta y_2[n], \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, && (5)
\end{aligned}$$

für alle Werte von a und b. Das System ist damit linear für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

ii. Sei $x[\cdot]$ ein beliebiges Eingangssignal und $y = Hx$ das zugehörige Ausgangssignal. Für ein beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ sei $x'[n] = x[n-k]$ und $y' = Hx'$ das zugehörige Ausgangssignal. Das System H ist zeitinvariant genau dann, wenn $y'[n] = y[n-k], \ \forall n \in \mathbb{Z}$, für alle $x[\cdot]$ und alle k gilt. Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}
& y'[n] = y[n-k] && (6)\\
\Leftrightarrow \quad & ax'[n] + b^n x'[n-1] = ax[n-k] + b^{n-k}x[n-k-1] && (7)\\
\Leftrightarrow \quad & ax[n-k] + b^n x[n-k-1] = ax[n-k] + b^{n-k}x[n-k-1] && (8)\\
\Leftrightarrow \quad & b^n x[n-k-1] = b^{n-k}x[n-k-1]. && (9)
\end{aligned}$$

Dies gilt für alle $x[\cdot]$ und alle $k, n \in \mathbb{Z}$ genau dann, wenn $b = 1$. Somit ist H zeitinvariant für $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$.

iii. Das System ist BIBO-stabil für $a \in \mathbb{R}$, $b \in \{-1, 1\}$. Dies beweisen wir wie folgt. Für jedes Eingangssignal $x[\cdot]$ mit $|x[n]| \leq D$, für alle $n \in \mathbb{Z}$, wobei $D \in \mathbb{R}_+$, haben wir für $a \in \mathbb{R}, b \in \{-1, 1\}$,

$$|y[n]| = |ax[n] + b^n x[n-1]| \leq |a|D + |b^n|D = (|a| + 1)D < \infty, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Andererseits ist das System nicht BIBO-stabil für $b \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. Um dies zu sehen, betrachten wir das Eingangssignal $x[n] = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$, welches offensichtlich beschränkt ist. Mit Hilfe der umgekehrten Dreiecksungleichung erhält man nun

$$|y[n]| = |a \cdot 1 + b^n \cdot 1| \geq ||b^n| - |a||\,.$$

Nun gilt für $|b| > 1$,

$$|y[n]| \geq ||b|^n - |a|| \xrightarrow{n \to \infty} \infty\ ,$$

und für $|b| < 1$

$$|y[n]| \geq ||b|^n - |a|| \xrightarrow{n \to -\infty} \infty\ .$$

Aufgabe 4

(a) i.

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n-N_0]e^{-2\pi ikn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi ik(n+N_0)/N}$$
$$= e^{-2\pi ikN_0/N}\hat{x}[k]$$

ii.

$$\begin{aligned}\hat{x}_e[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x_e[n]e^{-2\pi ikn/N} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi ikn/N} + \sum_{n=0}^{N-1} x^*[-n]e^{-2\pi ikn/N}\right)\end{aligned}$$

Nun erhalten wir unter Verwendung der N-Periodizität von $x[n]$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} x^*[-n]e^{-2\pi ikn/N} &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*[N-n]e^{2\pi ik(N-n)/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n]e^{2\pi ikn/N} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi ikn/N}\right)^* \\ &= \hat{x}^*[k].\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\hat{x}_e[k] = \frac{(\hat{x}[k] + \hat{x}^*[k])}{2} = \mathfrak{Re}\{\hat{x}[k]\}.$$

(b)

$$\hat{y}_1[k] = \sum_{n=0}^{2} y_1[n]e^{-2\pi ikn/3} = \sum_{n=0}^{2} y_1[n]w^{-kn} = \sum_{n=0}^{2} y_1[n]w^{2kn},\ k = 0, 1, 2,$$

wobei im letzten Schritt $w^3 = 1$ verwendet wurde. Also gilt $\hat{y}_1[k] = y_1[0] + y_1[1]w^{2k} + y_1[2]w^k, k = 0, 1, 2$, wobei wieder $w^3 = 1$ verwendet wurde. Ausgewertet für $y_1 = [\frac{1}{w}, 1, w]$, ergibt dies

$$\hat{y}_1[k] = w^{-1} + w^{2k} + w^{k+1} = w^2 + w^{2k} + w^{k+1},\ k = 0, 1, 2.$$

Zusammenfassend erhalten wir nun $\hat{y}_1 = [w^2 + 1 + w, w^2 + w^2 + w^2, w^2 + w + 1] = [0, 3w^2, 0]$.

Für y_2 beachten wir, dass $y_2 = [\cos(\frac{4\pi}{3}), 1, \cos(\frac{2\pi}{3})] = [\mathfrak{Re}\{e^{4\pi i/3}\}, \mathfrak{Re}\{1\}, \mathfrak{Re}\{e^{2\pi i/3}\}]$, oder umgeschrieben $y_2 = [\mathfrak{Re}\{w^2\}, \mathfrak{Re}\{1\}, \mathfrak{Re}\{w\}] = \mathfrak{Re}\{[w^2, 1, w]\} = \mathfrak{Re}\{y_1\}$.

Aus Gleichung 85 der Formelsammlung folgt damit

$$\hat{y}_2 = \left[\frac{(\hat{y}_1[0] + \hat{y}_1^*[0])}{2}, \frac{(\hat{y}_1[1] + \hat{y}_1^*[2])}{2}, \frac{(\hat{y}_1[2] + \hat{y}_1^*[1])}{2}\right],$$

wobei die 3-Periodizität von $\hat{y}_1$ verwendet wurde. Schliesslich erhalten wir $\hat{y}_2 = \left[0, \frac{3}{2}w^2, \frac{3}{2}w^{-2}\right] = \left[0, \frac{3}{2}w^2, \frac{3}{2}w\right]$.

(c) i.

$$\begin{aligned}
\hat{y}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi ikn/(3N)} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[n-N]e^{-2\pi ikn/(3N)} \\
&+ \sum_{n=2N}^{3N-1} x[n-2N]e^{-2\pi ikn/(3N)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi ikn/(3N)} + e^{-2\pi ik/3} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi ikn/(3N)} \\
&+ e^{-2\pi i2k/3} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi ikn/(3N)} \\
&= \underbrace{\sum_{\ell=0}^{2} e^{-2\pi ik\ell/3}}_{= \begin{cases} 3, & k = 0, 3, 6, \cdots \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi ikn/(3N)}}_{= \hat{x}\left[\frac{k}{3}\right]} \\
&= \begin{cases} 3\hat{x}\left[\frac{k}{3}\right], & \text{wenn } k = 3m \text{ mit } m \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
y[n] &= \frac{1}{3N} \sum_{k=0}^{3N-1} \hat{y}[k]e^{2\pi ikn/(3N)} \\
&= \frac{1}{3N} \sum_{\substack{k=0 \\ k=3m,\, m=0,1,\cdots,N-1}}^{3N-1} \overbrace{\hat{y}[k]}^{= 3\hat{x}[m]} e^{2\pi ikn/(3N)} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{x}[m]e^{2\pi imn/N} \\
&= x[n], \text{ wobei } x[n]\ N\text{-periodisch gedacht ist.}
\end{aligned}$$

Dies ergibt nun das $3N$-Punkt Signal

$$y = [\underbrace{x[0]\ x[1] \cdots x[N-1]}_{x[n]}\ \underbrace{x[0]\ x[1] \cdots x[N-1]}_{x[n]}\ \underbrace{x[0]\ x[1] \cdots x[N-1]}_{x[n]}].$$