Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Professur für Mathematische Informationswissenschaften
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
30. August 2022

Bitte beachten Sie:

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung ist die Formelsammlung erlaubt, die Sie von uns erhalten. Die Benutzung von Rechnern/Smartphones/Tablets jeglicher Art oder schriftlicher Unterlagen ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Aufgabenteile, die mit einem ★ gekennzeichnet sind, können unabhängig von vorhergehenden Aufgabenteilen gelöst werden.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen darauf hin, dass Sie der “Disziplinarverordnung ETH Zürich” unterstehen.

Vor der Klausur:

1. Dieses Angabenheft hat 7 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie bitte sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein und unterschreiben Sie.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen ausschliesslich auf die bereitgestellten leeren Blätter. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie weitere Blätter. Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen.

Nach der Klausur:

5. Legen Sie alle ihre Lösungsblätter und alle Aufgabenblätter auf einen Stapel zur Abgabe bereit (ohne Formelsammlung). Alle Aufgabenblätter müssen abgegeben werden. Räumen Sie dann bitte ihr Pult auf und warten Sie bis Sie den Raum gestaffelt Reihe für Reihe verlassen können.

Nachname: .... Vorname: ....

Legi-Nr.: ....

Unterschrift: ....

Aufgabe 1 (25 Punkte)

★ (a) (6 Punkte) Gegeben ist das Signal

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq t \leq 2T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Das Signal $x(t)$ liegt als Eingangssignal an drei Filtern F1, F2 und F3 an, charakterisiert durch die jeweiligen, im folgenden gegebenen Impulsantworten:

$$f_1(t) = \delta(t-T) + 2\delta(t-2T) \,,$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 2, & -T \leq t \leq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} ,$$

$$f_3(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 2T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Berechnen und skizzieren Sie die jeweiligen Ausgangssignale $z_1(t) = f_1(t) * x(t)$, $z_2(t) = f_2(t) * x(t)$ und $z_3(t) = f_3(t) * x(t)$. *Achten Sie auf die Beschriftung der Achsen!*

(b) (6 Punkte) Gegeben sei folgendes parametrisierte Signal:

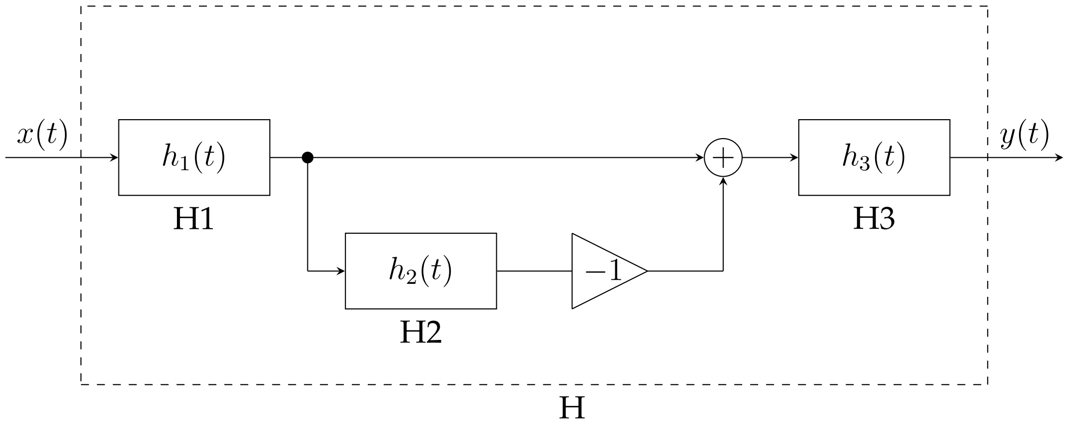
$$x_k(t) = \begin{cases} e^{-kt}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -e^{kt}, & t < 0 \end{cases}$$

mit $k \in \mathbb{R}, k \geq 0$.

★ i. (2 Punkte) Berechnen Sie im Zeitbereich die Grenzfunktion $x(t) = \lim_{k\to 0} x_k(t)$ und ermitteln Sie dann die Fouriertransformierte $\hat{x}(f)$ der resultierenden Grenzfunktion.

★ ii. (4 Punkte) Berechnen Sie nun die Grenzfunktion $\lim_{k\to 0} \hat{x}_k(f)$ und vergleichen Sie das Resultat mit dem Ergebnis für $\hat{x}(f)$ aus Punkt (b)i.

(c) (13 Punkte) Gegeben ist folgendes aus den LTI-Teilsystemen H1, H2 und H3 zusammengesetzte Gesamtsystem H:



Die Teilsysteme H1, H2 und H3 haben die jeweiligen Impulsantworten

$$h_1(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(2\pi f_c t)}{2\pi t}\right),$$

$$h_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-2\pi i f/f_c}\}$$

und

$$h_3(t) = 2\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - t_0)d\tau - 1$$

mit $f_c > 0$, $t_0 > 0$.

★ i. (6 Punkte) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen $\hat{h}_1(f)$ und $\hat{h}_2(f)$ in Abhängigkeit von f_c, sowie die Übertragungsfunktion $\hat{h}_3(f)$ in Abhängigkeit von t_0.

★ ii. (2 Punkte) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\hat{h}(f)$ des Gesamtsystems H in Abhängigkeit von $\hat{h}_1(f)$, $\hat{h}_2(f)$ und $\hat{h}_3(f)$.

iii. (5 Punkte) Am Eingang des Gesamtsystems H liegt das Signal $x(t) = \cos(\pi f_c t)$ an. Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $\hat{y}(f)$ des Ausgangssignals $y(t)$ in Abhängigkeit von f_c und t_0.

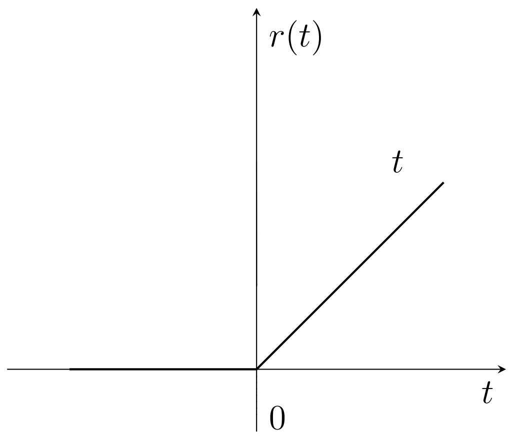
Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a) (8 Punkte) Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal

$$x(t) = \frac{1}{2}r(2t-1) + \frac{3}{2}r(t-2),$$

wobei

$$r(t) = \max\{0, t\} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}.$$



Die Funktion $r(t)$ weist an der Stelle $t = 0$ eine „Ecke“ auf.

★ i. (4 Punkte) Geben Sie die Ecken $t_0 \in \mathbb{R}$ und $t_1 \in \mathbb{R}$ der Funktion $x(t)$ an und stellen Sie $x(t)$ graphisch dar.

★ ii. (4 Punkte) Berechnen Sie die zweite Ableitung $D^2x(t)$ des Signals $x(t)$ und stellen Sie $D^2x(t)$ graphisch dar.

(b) (17 Punkte) Wir betrachten nun das zeitkontinuierliche Signal $x(t) = c_0\,\delta(t-t_0) + c_1\,\delta(t-t_1)$, wobei $c_0, c_1, t_0, t_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $0 < t_0 < t_1$, sowie das zeitdiskrete Filter mit Impulsantwort

$$h[n] = (\delta[n] - e^{-2\pi i t_0/T}\delta[n-1]) * (\delta[n] - e^{-2\pi i t_1/T}\delta[n-1]).$$

★ i. (4 Punkte) Setzen Sie das Signal $x(t)$ T-periodisch fort, mit Periode $T > t_1$, und berechnen Sie die zugehörigen Fourierreihenkoeffizienten $d_n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

★ ii. (4 Punkte) Berechnen Sie die Faltung der zeitdiskreten Signale $e^{-2\pi i t_k n/T}$, $n \in \mathbb{Z}$, und $\delta[n] - e^{-2\pi i t_k/T}\delta[n-1]$, $n \in \mathbb{Z}$, für $k = 0, 1$.

iii. (2 Punkte) Wir interpretieren die Fourierreihenkoeffizienten d_n aus Punkt i. nun als ein zeitdiskretes Signal $d[n]$ gemäss $d[n] := d_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Schliessen Sie aus dem Ergebnis in Punkt ii., dass $d[n] * h[n] = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. Begründen Sie Ihre Antwort.

★ iv. (5 Punkte) Berechnen Sie $\hat{h}(\theta)$. Definieren Sie $H(z)$ indem Sie in $\hat{h}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-2\pi in\theta}$ den Term $e^{2\pi i\theta}$ durch $z \in \mathbb{C}$ ersetzen. Geben Sie die Nullstellen u_k von $H(z)$ in der komplexen Ebene an.

v. (2 Punkte) Geben Sie eine Formel für die Werte von t_0 und t_1 an, als Funktion der Nullstellen von $H(z)$. Berechnen Sie t_0 und t_1 explizit für den Fall $u_0 = e^{-\frac{\pi i}{3}}, u_1 = e^{-\frac{4\pi i}{3}}$, mit $T = 3$.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein zeitdiskretes LTI-System H mit Frequenzgang

$$\widehat{h}(\theta) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta}} + \frac{1}{1 + \frac{5}{4}e^{2\pi i\theta}}.$$

★ (a) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems H.

★ (b) (7 Punkte) Bestimmen Sie die zum System H gehörige Differenzengleichung.

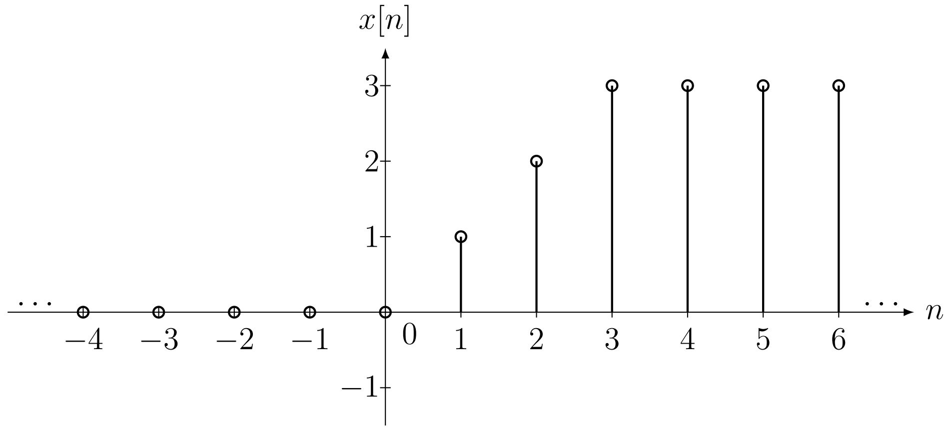
(c) (3 Punkte) Stellen Sie das System H in einem Blockschaltbild dar.

(d) (3 Punkte) Ist das System H BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Sprungantwort $a[n]$ von H.

★ (f) (2 Punkte) Wir betrachten nun das Eingangssignal,

$$x[n] = \begin{cases} n, & n \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ 3, & n > 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Bestimmen Sie das zu diesem Signal $x[n]$ gehörige Ausgangssignal von H als Funktion der Sprungantwort $a[n]$.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

(a) Es seien $x[n]$ und $y[n]$ N-periodische zeitdiskrete Signale mit zugehörigen N-Punkt diskreten Fouriertransformierten (DFT) $\hat{x}[n]$ und $\hat{y}[n]$. Wir betrachten nun folgende $(2N)$-periodische Signale:

$$u[n] = \begin{cases} x[n], & \text{für } n = 0, \ldots, N-1 \\ y[n-N], & \text{für } n = N, \ldots, 2N-1 \end{cases}$$

$$v[n] = \begin{cases} x[n], & \text{für } n = 0, \ldots, N-1 \\ 0, & \text{für } n = N, \ldots, 2N-1 \end{cases}$$

★ i. (10 Punkte) Berechnen Sie die $(2N)$-Punkt DFT $\hat{u}[k]$ des Signals $u[n]$ in Abhängigkeit der N-Punkt DFTs $\hat{x}[k]$ und $\hat{y}[k]$.

★ ii. (5 Punkte) Berechnen Sie die $(2N)$-Punkt DFT $\hat{v}[k]$ des Signals $v[n]$ in Abhängigkeit der N-Punkt DFT $\hat{x}[k]$.

(b) Es seien $x[n]$, $y[n]$ und $z[n]$ N-periodische Signale mit zugehörigen N-Punkt DFTs $\hat{x}[k]$, $\hat{y}[k]$ und $\hat{z}[k]$.

★ i. (5 Punkte) Beweisen Sie Gleichung 81 aus der Formelsammlung, d.h., dass die N-Punkt DFT des N-periodischen Signals

$$u[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[n-m]$$

durch

$$\hat{u}[k] = \hat{x}[k]\, \hat{y}[k]$$

gegeben ist.

★ ii. (5 Punkte) Berechnen Sie die N-Punkt DFT des N-periodischen Signals

$$w[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[n-\ell-m] z[\ell]$$

in Abhängigkeit der N-Punkt DFTs $\hat{x}[k]$, $\hat{y}[k]$ und $\hat{z}[k]$.