Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Professur für Mathematische Informationswissenschaften
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Lösung zur
Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
30. August 2022

Aufgabe 1

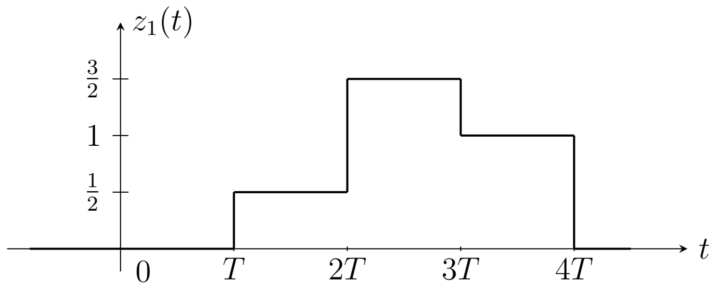
(a) Die Ausgangssignale werden durch Faltung berechnet:

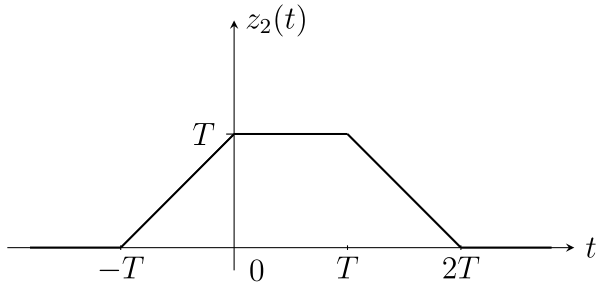
$$\begin{aligned} z_1(t) &= f_1(t) * x(t) \\ &= x(t-T) + 2x(t-2T) \\ &= \begin{cases} 0, & t < T \\ \frac{1}{2}, & T \le t < 2T \\ \frac{3}{2}, & 2T \le t < 3T \\ 1, & 3T \le t < 4T \\ 0, & t \ge 4T \end{cases} \end{aligned}$$

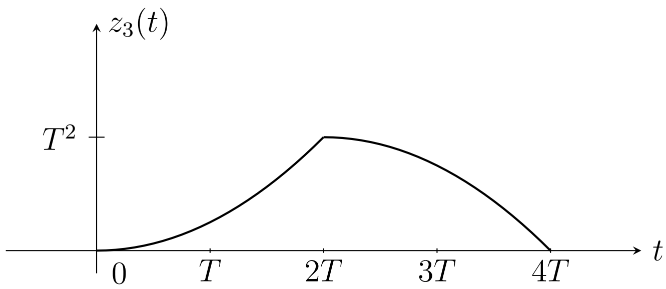
$$\begin{aligned} z_2(t) &= f_2(t) * x(t) \\ &= \begin{cases} 0, & t < -T \\ t+T, & -T \le t < 0 \\ T, & 0 \le t < T \\ -t+2T, & T \le t < 2T \\ 0, & t \ge 2T \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3(t) &= f_3(t) * x(t) \\ &= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{4}t^2, & 0 \le t < 2T \\ -\frac{1}{4}t^2 + Tt, & 2T \le t < 4T \\ 0, & t \ge 4T \end{cases} \end{aligned}$$

und können wie folgt skizziert werden:







(b) i. Wir haben

$$x(t) = \lim_{k \to 0} x_k(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \lim_{k\to 0} e^{-kt}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ \lim_{k \to 0}(-e^{kt}), & t < 0 \end{array} \right\} = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}.$$

Aus Gleichung 23 in der Formelsammlung erhalten wir damit

$$\hat{x}(f) = \frac{1}{\pi i f}.$$

ii. Zunächst bestimmen wir die Fouriertransformierte $\hat{x}_k(f)$ durch abschnittsweise Integration wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_k(f) &= -\int_{-\infty}^{0} e^{kt} e^{-2\pi i f t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-kt} e^{-2\pi i f t}\, dt \\
&= -\int_{-\infty}^{0} e^{(k-2\pi i f)t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{(-k-2\pi i f)t}\, dt \\
&= \left[\frac{-e^{(k-2\pi i f)t}}{k-2\pi i f}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{(-k-2\pi i f)t}}{-k-2\pi i f}\right]_{0}^{\infty} \\
&= \frac{-1}{k-2\pi i f} + \frac{-1}{-k-2\pi i f} \\
&= \frac{-4\pi i f}{k^2+4\pi^2 f^2}.
\end{aligned}
$$

Die verlangte Grenzfunktion erhält man nun gemäss

$$
\lim_{k\to 0} \hat{x}_k(f) = \lim_{k\to 0} \left(\frac{-4\pi i f}{k^2+4\pi^2 f^2}\right) = -\frac{i}{\pi f} = \frac{1}{\pi\, i f}.
$$

Wir stellen fest, dass die im Frequenzbereich ermittelte Grenzfunktion identisch ist mit der unter Punkt i. berechneten Grenzfunktion im Zeitbereich.

(c) i. Die Übertragungsfunktion $\hat{h}_1(f)$ lässt sich mit Hilfe der Formelsammlung wie folgt bestimmen. Aus Formel 27 in der Formelsammlung ergibt sich:

$$
\nu(t) = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{2\pi t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \hat{\nu}(f) = \frac{1}{2}\, r_{f_c}(f) \quad \text{mit} \quad r_{f_c}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \le f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases}.
$$

Unter Verwendung von Gleichung 14 in der Formelsammlung erhalten wir nun

$$
h_1(t) = \frac{d}{dt}\, \nu(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \hat{h}_1(f) = (2\pi i f)\hat{\nu}(f).
$$

Für die Übertragungsfunktion des Systems H2 ergibt sich

$$
\hat{h}_2(f) = \mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^{-1}\{e^{-2\pi i f/f_c}\} = e^{-2\pi i f/f_c}.
$$

Die Übertragungsfunktion $\hat{h}_3(f)$ erhält man aus

$$
h_3(t) = 2\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - t_0)d\tau - 1 = 2\sigma(t-t_0) - 1 = \text{sign}(t-t_0).
$$

Aus den Formeln 2 und 23 in der Formelsammlung folgt schliesslich

$$
\hat{h}_3(f) = \left(\frac{1}{\pi i f}\right) e^{-2\pi i f t_0}.
$$

ii. Die Gesamtübertragungsfunktion $\hat{h}(f)$ ergibt sich als

$$
\hat{h}(f) = \hat{h}_1(f)\left(1 - \hat{h}_2(f)\right)\hat{h}_3(f).
$$

iii. Die Übertragungsfunktion des Systems H ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\hat{h}(f) &= \hat{h}_1(f)\left(1-\hat{h}_2(f)\right)\hat{h}_3(f)\\ &= r_{f_c}(f)\,e^{-2\pi i f t_0}\left(1-e^{-2\pi i f/f_c}\right).\end{aligned}$$

Aus Gleichung 18 in der Formelsammlung erhalten wir:

$$\cos(\pi f_c t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}(\delta(f+f_c/2)+\delta(f-f_c/2)).$$

Die Fouriertransformierte $\hat{y}(f)$ des Signals $y(t)$ berechnet sich zu:

$$\begin{aligned}\hat{y}(f) &= \hat{h}(f)\hat{x}(f)\\ &= r_{f_c}(f)e^{-2\pi i f t_0}\left(1-e^{-2\pi i f/f_c}\right)\cdot\frac{1}{2}(\delta(f+f_c/2)+\delta(f-f_c/2))\\ &= \frac{1}{2}r_{f_c}(f)e^{-2\pi i f t_0}\left(1-e^{-2\pi i f/f_c}\right)\delta(f+f_c/2)\\ &\quad+\frac{1}{2}r_{f_c}(f)e^{-2\pi i f t_0}\left(1-e^{-2\pi i f/f_c}\right)\delta(f-f_c/2)\\ &= \frac{1}{2}e^{\pi i f_c t_0}(1-e^{i\pi})\delta(f+f_c/2)+\frac{1}{2}e^{-\pi i f_c t_0}(1-e^{-i\pi})\delta(f-f_c/2)\\ &= e^{\pi i f_c t_0}\delta(f+f_c/2)+e^{-\pi i f_c t_0}\delta(f-f_c/2).\end{aligned}$$

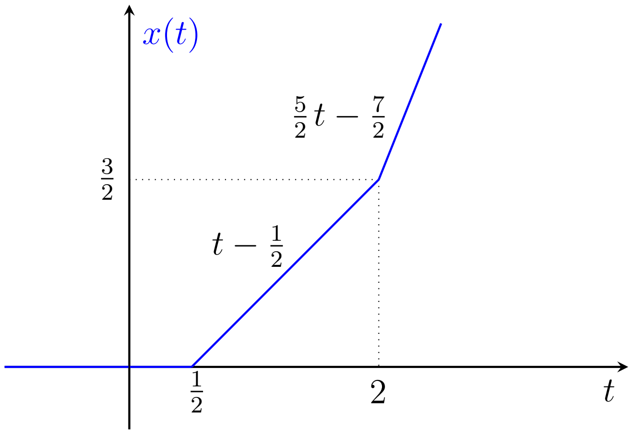
Aufgabe 2

(a) i. Die Ecken t_0, t_1 des Signals $x(t)$ sind gegeben durch die Lösungen folgender Gleichungen:

$$\begin{cases} 2t_0 - 1 = 0 \\ t_1 - 2 = 0 \end{cases}$$

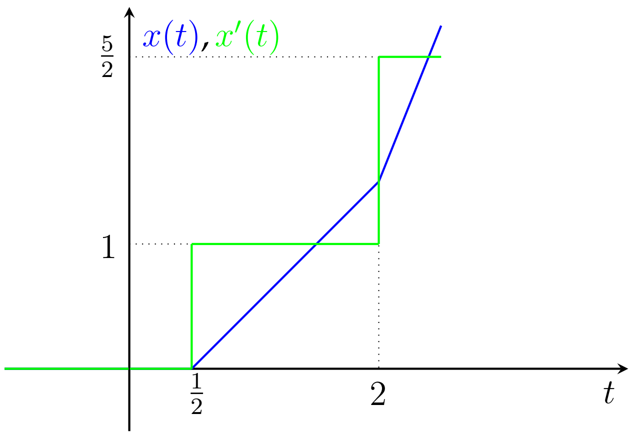
d.h.

$$\begin{cases} t_0 = \frac{1}{2} \\ t_1 = 2 \end{cases}$$

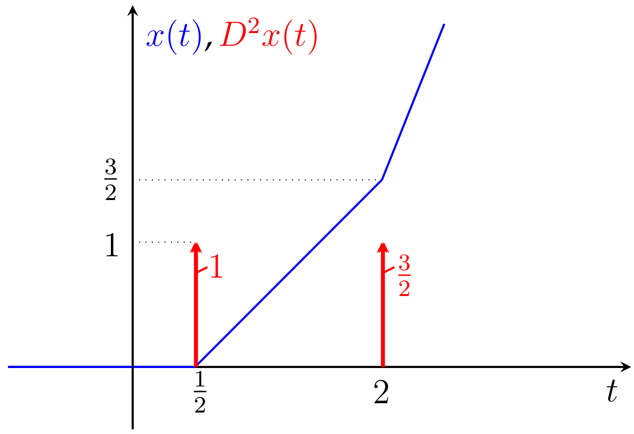


ii.

$$Dx(t) = x'(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq t < 2 \\ \frac{5}{2}, & t \geq 2 \end{cases}$$



Die zweite Ableitung von $x(t)$ ist gegeben durch $D^2x(t) = \delta(t-\frac{1}{2})+\frac{3}{2}\delta(t-2)$.



(b) i. Die Fourierreihenkoeffizienten sind gegeben durch

$$
\begin{aligned}
d_n &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-\frac{2\pi i n t}{T}}\, dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \left[c_0\,\delta(t-t_0) + c_1\,\delta(t-t_1)\right] e^{-\frac{2\pi i n t}{T}}\, dt \\
&= \frac{1}{T}\left[c_0\, e^{-\frac{2\pi i n t_0}{T}} + c_1\, e^{-\frac{2\pi i n t_1}{T}}\right].
\end{aligned}
$$

ii. Für $k = 0, 1$ gilt:

$$
\begin{aligned}
(e^{-\frac{2\pi i t_k \bullet}{T}} * (\delta[\bullet] - e^{-\frac{2\pi i t_k}{T}}\delta[\bullet - 1]))[n] &= e^{-\frac{2\pi i t_k n}{T}} - e^{-\frac{2\pi i t_k}{T}} e^{-\frac{2\pi i t_k (n-1)}{T}} \\
&= e^{-\frac{2\pi i t_k n}{T}} - e^{-\frac{2\pi i t_k}{T}} e^{\frac{2\pi i t_k}{T}} e^{-\frac{2\pi i t_k n}{T}} \\
&= 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

iii. Aus dem Ergebnis von Punkt ii. und der Tatsache, dass die Faltung kommutativ ist, folgt dass jeder Exponentialterm $e^{-\frac{2\pi i t_k n}{T}}$ in $d[n]$ durch einen der zwei Faktoren $(\delta[\bullet] - e^{-\frac{2\pi i t_k}{T}}\delta[\bullet - 1]), k = 0, 1$, zu Null gemacht wird. Da $d[n]$ eine Linearkombination von solchen Exponentialtermen ist, erhält man $d[n] * h[n] = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.

iv. Aus den Formeln (59) und (67) in der Formelsammlung ergibt sich

$$
\hat{h}(\theta) = (1 - e^{-\frac{2\pi i t_0}{T}} e^{-2\pi i \theta})\,(1 - e^{-\frac{2\pi i t_1}{T}} e^{-2\pi i \theta}).
$$

Durch Ersetzen von $e^{2\pi i\theta}$ durch z ergibt sich $H(z) = (1 - e^{-\frac{2\pi i t_0}{T}} z^{-1})\,(1 - e^{-\frac{2\pi i t_1}{T}} z^{-1})$. Die Nullstellen von $H(z)$ sind damit gegeben durch $u_0 = e^{-\frac{2\pi i t_0}{T}}$ und $u_1 = e^{-\frac{2\pi i t_1}{T}}$.

v.

$$
t_k = -\frac{T}{2\pi}\arg(u_k), \quad k = 0, 1.
$$

Einsetzen der gegebenen numerischen Werte ergibt

$$t_0 = -\frac{T}{2\pi}\arg(u_0) = -\frac{3}{2\pi}\arg(e^{-\frac{\pi i}{3}}) = -\frac{3}{2\pi}\,(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

$$t_1 = -\frac{T}{2\pi}\arg(u_1) = -\frac{3}{2\pi}\arg(e^{-\frac{4\pi i}{3}}) = -\frac{3}{2\pi}\,(-\frac{4\pi}{3}) = 2$$

Aufgabe 3

(a) Wir schreiben den Frequenzgang wie folgt

$$\widehat{h}(\theta) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta}} + \frac{4}{5}\, e^{-2\pi i\theta}\, \frac{1}{1 + \frac{4}{5}e^{-2\pi i\theta}}.$$

Aus Gleichung 73 in der Formelsammlung erhalten wir

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta}}, \text{ und } \left(-\frac{4}{5}\right)^n \sigma[n] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{1 + \frac{4}{5}e^{-2\pi i\theta}}.$$

In Kombination mit Gleichung 55 in der Formelsammlung ergibt sich somit

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n] + \frac{4}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1} \sigma[n-1].$$

(b) Wir formen den Frequenzgang wie folgt um

$$\widehat{h}(\theta) = \frac{\frac{5}{4}e^{2\pi i\theta} + 2 - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta}}{\frac{5}{4}e^{2\pi i\theta} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2}e^{-2\pi i\theta}} = \frac{1 + \frac{8}{5}e^{-2\pi i\theta} - \frac{2}{5}e^{-4\pi i\theta}}{1 + \frac{3}{10}e^{-2\pi i\theta} - \frac{2}{5}e^{-4\pi i\theta}}. \tag{1}$$

Aus der Beziehung

$$\widehat{y}(\theta) = \widehat{x}(\theta)\,\widehat{h}(\theta) = \widehat{x}(\theta)\, \frac{1 + \frac{8}{5}e^{-2\pi i\theta} - \frac{2}{5}e^{-4\pi i\theta}}{1 + \frac{3}{10}e^{-2\pi i\theta} - \frac{2}{5}e^{-4\pi i\theta}}$$

folgt nun

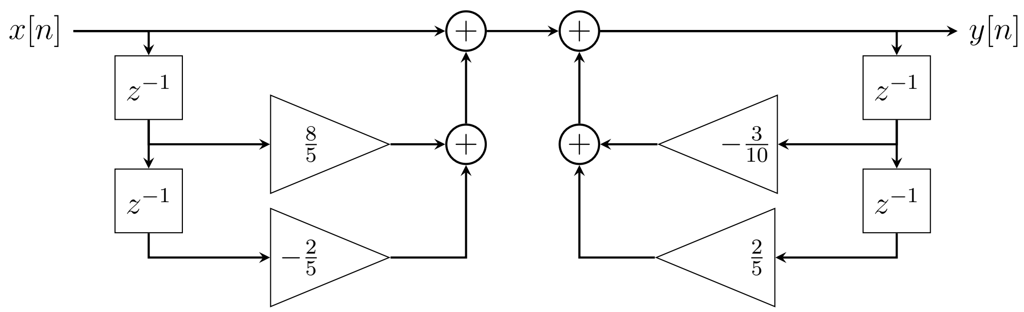
$$\widehat{y}(\theta)\left(1 + \frac{3}{10}e^{-2\pi i\theta} - \frac{2}{5}e^{-4\pi i\theta}\right) = \widehat{x}(\theta)\left(1 + \frac{8}{5}e^{-2\pi i\theta} - \frac{2}{5}e^{-4\pi i\theta}\right).$$

Dies schreiben wir um gemäss

$$\widehat{y}(\theta) = \widehat{x}(\theta) + \frac{8}{5}e^{-2\pi i\theta}\widehat{x}(\theta) - \frac{2}{5}e^{-4\pi i\theta}\widehat{x}(\theta) - \frac{3}{10}e^{-2\pi i\theta}\widehat{y}(\theta) + \frac{2}{5}e^{-4\pi i\theta}\widehat{y}(\theta).$$

Aus Gleichung 55 in der Formelsammlung erhalten wir somit die zugehörige Differenzengleichung als

$$y[n] = x[n] + \frac{8}{5}x[n-1] - \frac{2}{5}x[n-2] - \frac{3}{10}y[n-1] + \frac{2}{5}y[n-2].$$

(c) 

(d) Wir berechnen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n] + \frac{4}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1} \sigma[n-1] \right| \tag{2}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{2}\right|^n + \frac{4}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{4}{5}\right|^{n-1} \tag{3}$$

$$= 2 + 4 = 6 < \infty. \tag{4}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$ eine hinreichende Bedingung für BIBO-Stabilität ist. Somit ist das gegebene System H BIBO-stabil.

(e) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
a[n] &= (h * \sigma)[n] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k \sigma[k] + \frac{4}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)^{k-1} \sigma[k-1] \right) \sigma[n-k] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \sigma[k]\sigma[n-k] + \frac{4}{5} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^{k-1} \sigma[k-1]\sigma[n-k] \\
&= \sigma[n] \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sigma[n-1]\, \frac{4}{5} \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{4}{5}\right)^{k-1} \\
&= \sigma[n]\, \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + \sigma[n-1]\, \frac{4}{5} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{4}{5}\right)^k \\
&= \sigma[n] \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + \sigma[n-1]\, \frac{4}{5}\, \frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^n}{1+\frac{4}{5}} \\
&= \sigma[n] \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + \sigma[n-1]\, \frac{4}{9} \left(1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

(f) Wir schreiben das Eingangssignal gemäss $x[n] = \sigma[n-1] + \sigma[n-2] + \sigma[n-3]$. Damit folgt unter Verwendung der Linearität und der Zeitinvarianz von H, dass

$$(Hx)[n] = a[n-1] + a[n-2] + a[n-3], \tag{5}$$

wobei $a[n]$ die in Punkt (e) berechnete Sprungantwort ist.

Aufgabe 4

(a) i.

$$\begin{aligned}
\hat{u}[k] &= \sum_{n=0}^{2N-1} u[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{2N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{2N}} + \sum_{n=N}^{2N-1} y[n-N] e^{-\frac{2\pi i k n}{2N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{2N}} + \sum_{m=0}^{N-1} y[m] e^{-\frac{2\pi i k (m+N)}{2N}} \qquad (6) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{2N}} + (-1)^k \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{2N}},
\end{aligned}$$

wobei wir in (6) $m = n - N$ gesetzt haben. Für geradzahlige k, d.h. $k = 2\ell$, erhalten wir

$$\hat{u}[2\ell] = \hat{x}[\ell] + \hat{y}[\ell], \quad \text{für } \ell \in \{0, 1, \ldots, N-1\}. \qquad (7)$$

Für ungeradzahlige k, d.h. $k = 2\ell + 1$, bekommen wir

$$\begin{aligned}
\hat{u}[2\ell+1] &= \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - y[n]) e^{-\frac{2\pi i (2\ell+1) n}{2N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - y[n]) z[n] e^{-\frac{2\pi i \ell n}{N}} \qquad (8) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} (\hat{x}[m] - \hat{y}[m]) \hat{z}[\ell - m], \quad \text{für } \ell \in \{0, 1, \ldots, N-1\}, \qquad (9)
\end{aligned}$$

wobei in (8) $z[n] = e^{-\frac{\pi i n}{N}}$, für $n = 0, \ldots, N-1$, gesetzt wurde. In (9) wurde Gleichung 82 aus der Formelsammlung verwendet, wobei $\hat{z}[k]$ die N-Punkt DFT der N-periodischen Fortsetzung des Signals $z[n]$ bezeichnet.

Verwendung der Identität

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{N-1})(1 - x) = 1 - x^N, \quad \text{für } x \in \mathbb{C}$$

ergibt nun

$$\hat{z}[\ell] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{\pi i (2\ell+1) n}{N}} = \frac{2}{1 - e^{-\frac{\pi i (2\ell+1)}{N}}}, \quad \text{für } \ell \in \{0, 1, \ldots, N-1\}. \qquad (10)$$

Durch Einsetzen von (10) in (9) erhalten wir schliesslich

$$\hat{u}[2\ell+1] = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\hat{x}[m] - \hat{y}[m]}{1 - e^{-\frac{\pi i (2(\ell - m)+1)}{N}}}, \quad \text{für } \ell \in \{0, 1, \ldots, N-1\}. \qquad (11)$$

ii. Für geradzahlige k, d.h. $k = 2\ell$, bekommen wir

$$\begin{aligned}
\hat{v}[2\ell] &= \sum_{n=0}^{2N-1} v[n] e^{-\frac{2\pi i \ell n}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i \ell n}{N}} && (12) \\
&= \hat{x}[\ell], \quad \text{für } \ell \in \{0, 1, \ldots, N-1\}. && (13)
\end{aligned}$$

Alternativ können wir auch direkt (7) für den Spezialfall $y = \hat{y} = 0$ auswerten, um auf das selbe Ergebnis zu kommen.

Für ungeradzahlige k, d.h. $k = 2\ell + 1$, bekommen wir direkt aus (11) für den Spezialfall $y = \hat{y} = 0$,

$$\hat{v}[2\ell+1] = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\hat{x}[m]}{1 - e^{-\frac{\pi i (2(\ell - m)+1)}{N}}}, \quad \text{für } \ell \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

(b) i.

$$\begin{aligned}
\hat{u}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[n-m] \right) e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} y[n-m] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \right) x[m] \\
&= \hat{y}[k] \sum_{m=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i k m}{N}} x[m] && (14) \\
&= \hat{x}[k] \hat{y}[k], && (15)
\end{aligned}$$

wobei wir in (14) Gleichung 77 aus der Formelsammlung mit $N_0 = m$ verwendet haben.

ii. Wir stellen zunächst fest, dass $w[n]$ in folgender Form geschrieben werden kann

$$w[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} u[n-\ell] z[\ell],$$

mit

$$u[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[n-m].$$

Anwendung von Gleichung 81 aus der Formelsammlung auf das Signal $w[n]$ ergibt

$$\hat{w}[k] = \hat{u}[k] \hat{z}[k]. \qquad (16)$$

Nochmalige Anwendung von Gleichung 81 aus der Formelsammlung auf das Signal $u[n]$ liefert

$$\hat{u}[k] = \hat{x}[k]\hat{y}[k]. \tag{17}$$

Durch Einsetzen von (17) in (16) erhalten wir schliesslich

$$\hat{w}[k] = \hat{x}[k]\hat{y}[k]\hat{z}[k].$$