Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Professur für Mathematische Informationswissenschaften
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

# Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
# 4. Februar 2023

**Bitte beachten Sie:**

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung ist die Formelsammlung erlaubt, die Sie von uns erhalten. Die Benutzung von Rechnern/Smartphones/Tablets jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Aufgabenteile, die mit einem ★ gekennzeichnet sind, können unabhängig von vorhergehenden Aufgabenteilen gelöst werden.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen darauf hin, dass Sie der "Disziplinarverordnung ETH Zürich" unterstehen.

**Vor der Klausur:**

1. Dieses Angabenheft hat 7 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie bitte sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein und unterschreiben Sie.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

**Während der Klausur:**

4. Schreiben Sie die Lösungen ausschliesslich auf die bereitgestellten leeren Blätter. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie weitere Blätter. Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen.

**Nach der Klausur:**

5. Legen Sie alle ihre Lösungsblätter und alle Aufgabenblätter auf einen Stapel zur Abgabe bereit (ohne Formelsammlung). Alle Aufgabenblätter müssen abgegeben werden. Räumen Sie dann bitte ihr Pult auf und warten Sie bis Sie den Raum gestaffelt Reihe für Reihe verlassen können.

Nachname: .................... Vorname: ....................

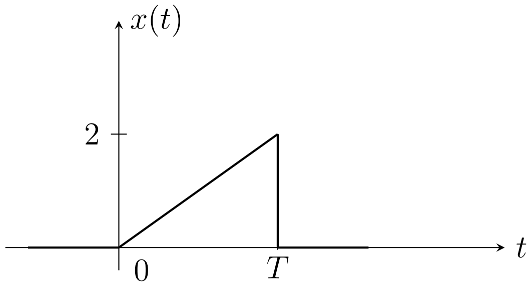
Legi-Nr.: ....................................

Unterschrift: ..............................................

**Aufgabe 1**

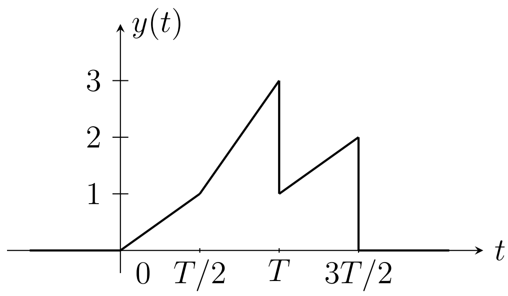
(a) Gegeben sei das Signal $x(t)$ gemäss

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{2}{T}t, & 0 \le t \le T \\ 0, & t > T \end{cases}.$$




★ i. Das Signal $x(t)$ liegt am Eingang eines LTI-Systems mit der Impulsantwort $h(t)$ an. Das zugehörige Ausgangssignal $y(t)$ des LTI-Systems ist gegeben durch

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \frac{2}{T}t, & 0 < t \le \frac{T}{2} \\ \frac{4}{T}t - 1, & \frac{T}{2} < t \le T \\ \frac{2}{T}t - 1, & T < t \le \frac{3T}{2} \\ 0, & t > \frac{3T}{2} \end{cases}.$$



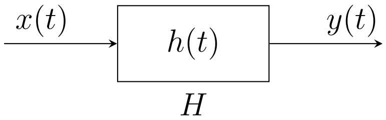

Bestimmen Sie die Impulsantwort $h(t)$ in Abhängigkeit von $T$.

ii. Bestimmen Sie den Frequenzgang $\hat{h}(f)$ des LTI-Systems in Abhängigkeit von $T$.

(b) Das Signal

$$x(t) = te^{-2t}\cos(t)\sigma(t) \quad \text{mit} \quad \sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

liegt am Eingang des LTI-Systems $H$ mit Impulsantwort $h(t)$ an:

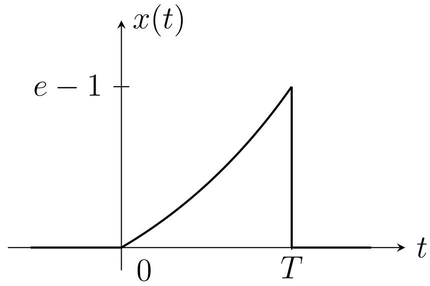



★ i. Das zu $x(t)$ gehörige Ausgangssignal ist $y(t) = te^{-2t}\sin(t)\sigma(t)$. Bestimmen Sie die Fouriertransformierten $\hat{y}(f)$ und $\hat{x}(f)$.

ii. Bestimmen Sie den Frequenzgang $\hat{h}(f)$ des Systems $H$.

(c) Gegeben seien das Signal $x(t)$ gemäss

$$x(t) = \begin{cases} e^{\frac{t}{T}} - 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \text{mit} \quad T > 0,$$




und das LTI-System $G$ mit Impulsantwort

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{e}, & t \geq T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es sei $z_1(t) = (x * g)(t)$.

★ i. Berechnen und skizzieren Sie die Funktion $z_1(t)$. Bitte beschriften Sie die Achsen in Ihrer Skizze.

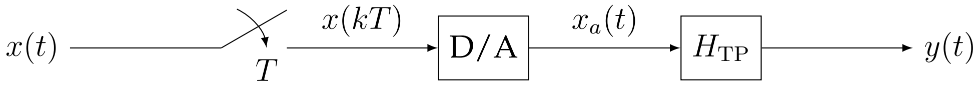
★ ii. Berechnen und skizzieren Sie die Funktion $z_2(t) = (x^- * g)(t)$, wobei $x^-(t) = x(-t)$. Bitte beschriften Sie die Achsen in Ihrer Skizze.

## Aufgabe 2

Gegeben sei das zeitkontinuierliche Signal

$$x(t) = \frac{\sin^2(2\pi t)}{\pi^2 t^2}$$

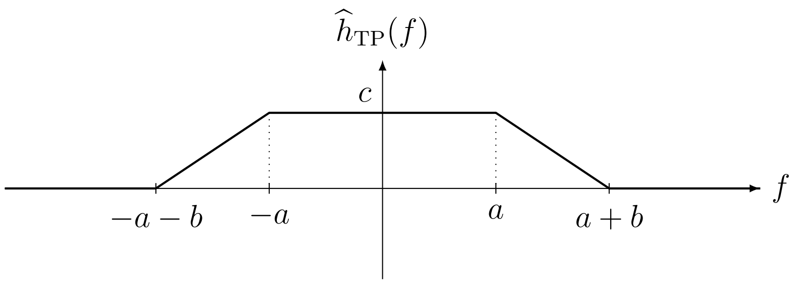
welches an folgendem System anliegt:




Der D/A-Wandler ist durch die Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\,\delta(t - kT)$$

spezifiziert. Das LTI-System $H_{\mathrm{TP}}$ hat den im folgenden Diagramm dargestellten Frequenzgang $\widehat{h}_{\mathrm{TP}}(f)$




wobei $a > 0$ und $b, c \geq 0$. Nehmen Sie durchgehend $T = 1/3$ an.

★ (a) Berechnen Sie $\widehat{x}(f)$.

★ (b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{x}_a(f)$ und schreiben Sie diese als Funktion von $\widehat{x}(f)$.

(c) Skizzieren Sie $\widehat{x}_a(f)$ im Bereich $f \in [-5, 5]$. Bitte beschriften Sie die Achsen in der Skizze.

(d) Berechnen Sie nun $y(t)$ für den Spezialfall $a = 2$, $b = 0$, $c = 1$.

(e) Bestimmen Sie Werte $a \in (0, \infty)$ und $b, c \in [0, \infty)$, sodass $x(t) = y(t)$ gilt. Begründen Sie ihre Antwort.
*Hinweis: Sie müssen keine zulässigen Bereiche für die Werte von $a, b, c$ angeben, ein konkretes Zahlenbeispiel reicht!*

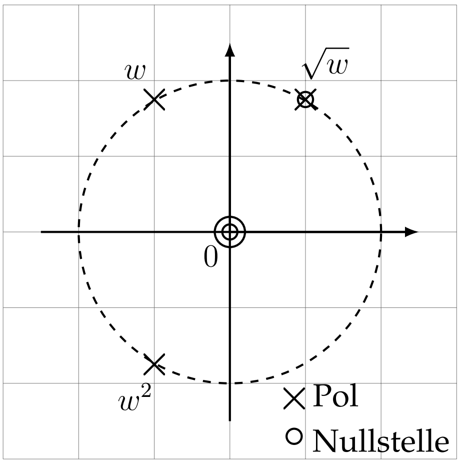
**Aufgabe 3**

★ (a) Es sei $y[n] = x[-n] + n^2 x[n]$, wobei $x[n]$ ein beliebiges zeitdiskretes Signal mit $\mathcal{Z}$-Transformierter $X(z)$ ist.

★ i. Berechnen Sie die $\mathcal{Z}$-Transformierte $Y(z)$ von $y[n]$ als Funktion von $X(z)$.

ii. (1 Punkt) Berechnen Sie die Summe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} y[n]$ als Funktion von $X(1)$, $X'(1)$ und $X''(1)$, wobei $X'(z)$ und $X''(z)$ für die 1. respektive 2. Ableitung von $X(z)$ steht.

★ (b) Man betrachte das folgende Pol-Nullstellen Diagramm für die $\mathcal{Z}$-Transformierte $H(z)$, wobei der doppelte Kreis um 0 eine Nullstelle zweiter Ordnung bezeichnet. Es sei $w = e^{\frac{i2\pi}{3}}$.




★ i. Zeigen Sie, dass $H(z) = \dfrac{1}{1 + z^{-1} + z^{-2}}$.

*Hinweis:* Sie dürfen in den folgenden Teilaufgaben mit dem Ausdruck für $H(z)$ weiterrechnen, auch wenn Sie die Herleitung nicht finden. Benutzen Sie zudem die Identitäten $w^3 = 1$ und $1 + w + w^2 = 0$.

★ ii. Berechnen Sie die zu $H(z)$ gehörige Impulsantwort $h[n]$, so dass das System kausal ist.

★ iii. Kann man für $H(z)$ eine ROC wählen, so dass das System BIBO-stabil ist? Kann man für $H(z/2)$ eine ROC wählen, so dass das System BIBO-stabil ist? In beiden Fällen, falls ja, geben Sie die entsprechende ROC an. Begründen Sie Ihre Antworten.

★ (c) Zeigen Sie, dass die $\mathcal{Z}$-Transformierte von $x[Mn]$, für $M \in \mathbb{N}$, gegeben ist durch

$$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X\left(z^{1/M} \mathrm{e}^{\frac{2\pi i m}{M}}\right),$$

d.h.

$$x[Mn] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X\left(z^{1/M} \mathrm{e}^{\frac{2\pi i m}{M}}\right).$$

**Aufgabe 4**

In der Vorlesung wurde der FFT Algorithmus von Cooley & Tukey zur effizienten Berechnung der diskreten Fouriertransformation (DFT) besprochen. Ziel dieser Aufgabe ist es, einen dazu strukturdualen Algorithmus zur Berechnung der inversen DFT zu analysieren.

★(a) Es sei $N \in \mathbb{N}$ eine beliebige gerade Zahl und $x[n]$ ein beliebiges $N$-periodisches zeitdiskretes Signal mit zugehöriger $N$-Punkt DFT $\hat{x}[k]$. Des Weiteren definieren wir die folgenden $(N/2)$-periodischen zeitdiskreten Signale im Frequenzberich

$$\hat{g}[r] = \hat{x}[2r], \quad r = 0, \dots, N/2-1$$
$$\hat{u}[r] = \hat{x}[2r+1], \quad r = 0, \dots, N/2-1$$

mit zugehörigen inversen $(N/2)$-Punkt DFTs $g[n]$ und $u[n]$. Zeigen Sie, dass $x[n]$, $g[n]$ und $u[n]$ folgende Beziehung erfüllen:

$$x[n] = \frac{1}{2}\big(g[n] + e^{2\pi i n/N} u[n]\big), \quad n = 0, \dots, N-1. \tag{1}$$

*Hinweis:* Sie dürfen in den folgenden Teilaufgaben das Ergebnis dieser Teilaufgabe verwenden, auch wenn Sie die Lösung dieser Teilaufgabe nicht finden.

★(b) Wir betrachten nun den Spezialfall $N = 8$ und ein allgemeines $8$-periodisches zeitdiskretes Signal $x[n]$ mit zugehöriger $8$-Punkt DFT $\hat{x}[k]$.

★ i. Wenden Sie das Resultat aus Teilaufgabe (a) iterativ, im Geiste des in der Vorlesung behandelten FFT-Algorithmus, an, um die inverse $8$-Punkt DFT $x[n]$ des Signals $\hat{x}[k]$ in Abhängigkeit von $\hat{x}[0], \hat{x}[1], \dots, \hat{x}[7]$ darzustellen.

*Hinweis:* Sie dürfen bei dieser Teilaufgabe die inverse $8$-Punkt DFT des Signals $\hat{x}[k]$ *nicht* direkt berechnen. Ziel der Teilaufgabe ist es, dass nach iterativer Anwendung von (1) nur mehr inverse $2$-Punkt DFTs explizit berechnet werden müssen.

ii. Vereinfachen Sie den Ausdruck für $x[4]$ aus Teilaufgabe (b)i. soweit wie möglich, und bestimmen Sie an Hand dieses vereinfachten Ausdrucks die Anzahl der Rechenoperationen, die nötig sind, um $x[4]$ zu berechnen.

*Hinweis:* Addition, Subtraktion und Multiplikation zählen jeweils als eine Rechenoperation.

(c) Berechnen Sie die inverse DFT des $8$-Punkt Signals $(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1)$ mit Hilfe des Ausdrucks für $x[n]$ aus Teilaufgabe (b)i.