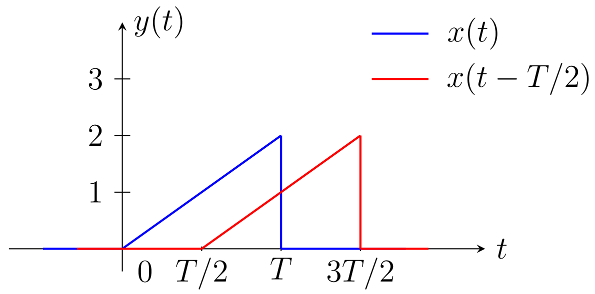
ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Professur für Mathematische Informationswissenschaften
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Lösung zur
Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
4. Februar 2023

Aufgabe 1

(a) i. Das Ausgangssignal $y(t)$ lässt sich wie in unten gezeigter Grafik aus einer Superposition zweier verschobener Versionen des Signals $x(t)$, gemäss $y(t) = x(t) + x(t - T/2)$, darstellen.



Daraus folgt direkt, dass die Impulsantwort des LTI-Systems gegeben ist durch

$$h(t) = \delta(t) + \delta\left(t - \frac{T}{2}\right).$$

ii. Aus Gleichung 16 in der Formelsammlung ergibt sich die Fouriertransformierte $\hat{h}(f)$ als

$$\hat{h}(f) = 1 + e^{-\pi i f T}.$$

(b) i. Die Fouriertransformierten $\hat{x}(f)$ und $\hat{y}(f)$ lassen sich wie folgt bestimmen. Aus Gleichung 25 in der Formelsammlung ergibt sich

$$te^{-2t}\sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(2 + 2\pi i f)^2}.$$

Aus den Gleichungen 18 und 19 in der Formelsammlung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\cos(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\left(\delta\left(f + \frac{1}{2\pi}\right) + \delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right)\right) \\
\sin(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{i}{2}\left(\delta\left(f + \frac{1}{2\pi}\right) - \delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right)\right).
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von Gleichung 8 in der Formelsammlung folgt nun

$$\begin{aligned} x(t) = te^{-2t}\sigma(t)\cos(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(2+2\pi i f)^2} * \frac{1}{2}\left(\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)+\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)\right) \\ y(t) = te^{-2t}\sigma(t)\sin(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(2+2\pi i f)^2} * \frac{i}{2}\left(\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)-\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)\right) \end{aligned}.$$

Die Fouriertransformierte $\hat{x}(f)$ ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{x}(f) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2+2\pi i(f+\frac{1}{2\pi}))^2}+\frac{1}{(2+2\pi i(f-\frac{1}{2\pi}))^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2+i+2\pi i f)^2}+\frac{1}{(2-i+2\pi i f)^2}\right). \end{aligned}$$

Die Fouriertransformierte $\hat{y}(f)$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \hat{y}(f) &= \frac{i}{2}\left(\frac{1}{(2+2\pi i(f+\frac{1}{2\pi}))^2}-\frac{1}{(2+2\pi i(f-\frac{1}{2\pi}))^2}\right) \\ &= \frac{i}{2}\left(\frac{1}{(2+i+2\pi i f)^2}-\frac{1}{(2-i+2\pi i f)^2}\right). \end{aligned}$$

ii. Den Frequenzgang $\hat{h}(f)$ erhält man nun gemäss

$$\begin{aligned} \hat{h}(f) &= \frac{\hat{y}(f)}{\hat{x}(f)} \\ &= \frac{\frac{i}{2}\left(\frac{1}{(2+i+2\pi i f)^2}-\frac{1}{(2-i+2\pi i f)^2}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2+i+2\pi i f)^2}+\frac{1}{(2-i+2\pi i f)^2}\right)} \\ &= i\frac{(2-i+2\pi i f)^2-(2+i+2\pi i f)^2}{(2-i+2\pi i f)^2+(2+i+2\pi i f)^2}. \end{aligned}$$

(c) i. Das Signal $z_1(t)$ wird durch Faltung berechnet:

$$z_1(t) = \frac{1}{e}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{\frac{\tau}{T}}-1)\mathbb{1}_{[0,T]}(\tau)\sigma(t-\tau-T)d\tau,$$

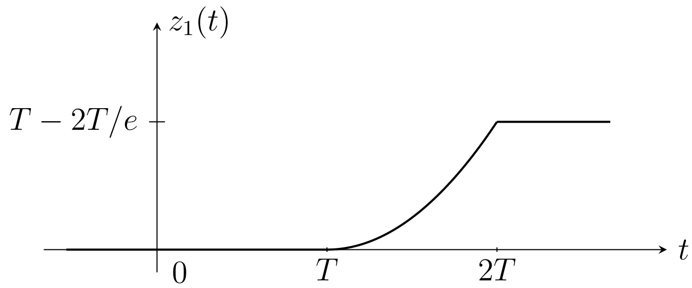
wobei $\mathbb{1}_{[0,T]}(t) = \sigma(t)-\sigma(t-T)$. Wir arbeiten nun mit Fallunterscheidung in Bezug auf t. Konkret folgt für $t \le T$, $z_1(t) = 0$. Auf dem Intervall $t \in [T, 2T]$ hat die Funktion $z_1(t)$ einen ansteigenden Verlauf, der wie folgt ermittelt werden kann:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \frac{1}{e}\int_0^{t-T}(e^{\frac{\tau}{T}}-1)d\tau \\ &= \frac{1}{e}\left(Te^{\frac{\tau}{T}}-\tau\right)\Big|_0^{t-T} \\ &= \frac{T}{e^2}e^{\frac{t}{T}}-\frac{t}{e}, \quad t \in [T, 2T]. \end{aligned}$$

Ab dem Zeitpunkt $t = 2T$ bleibt die Funktion $z_1(t)$ konstant auf ihrem Maximalwert M_1, gegeben durch

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{e}\int_0^T (e^{\frac{\tau}{T}} - 1)d\tau \\ &= \frac{1}{e}\left(Te^{\frac{\tau}{T}} - \tau\right)\Big|_0^T \\ &= T - \frac{2T}{e}. \end{aligned}$$

Die Funktion $z_1(t)$ kann damit wie folgt skizziert werden.



ii. Das Signal $z_2(t)$ wird durch Faltung berechnet:

$$z_2(t) = \frac{1}{e}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-\frac{\tau}{T}} - 1)\mathbb{1}_{[-T,0]}(\tau)\sigma(t - \tau - T)d\tau,$$

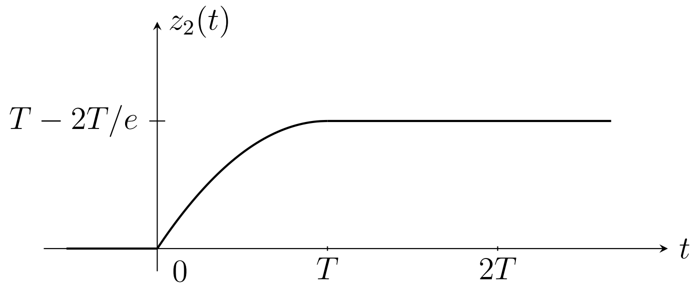
wobei $\mathbb{1}_{[-T,0]}(t) = \sigma(t+T) - \sigma(t)$. Fallunterscheidung in Bezug auf t, wie in i., liefert nun $z_2(t) = 0$ für $t \leq 0$. Auf dem Intervall $t \in [0, T]$ hat die Funktion $z_2(t)$ einen ansteigenden Verlauf, der wie folgt ermittelt werden kann:

$$\begin{aligned} z_2(t) &= \frac{1}{e}\int_{-T}^{t-T}(e^{-\frac{\tau}{T}} - 1)d\tau \\ &= \frac{1}{e}\left(-Te^{-\frac{\tau}{T}} - \tau\right)\Big|_{-T}^{t-T} \\ &= -Te^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{e} + T, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Ab dem Zeitpunkt $t = T$ bleibt die Funktion $z_2(t)$ konstant auf ihrem Maximalwert M_2, gegeben durch

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{1}{e}\int_{-T}^{0}(e^{-\frac{\tau}{T}} - 1)d\tau \\ &= \frac{1}{e}\left(-Te^{-\frac{\tau}{T}} - \tau\right)\Big|_{-T}^{0} \\ &= T - \frac{2T}{e}. \end{aligned}$$

Die Funktion $z_2(t)$ kann damit wie folgt skizziert werden.



Aufgabe 2

(a) Wir schreiben $x(t)$ gemäss

$$x(t) = 2\,\frac{\sin^2(-2\pi t)}{2\pi^2(-t)^2}.$$

Aus Gleichung 29 in der Formelsammlung erhalten wir, unter Verwendung der Dualität der Fouriertransformation gemäss

$$\widehat{x}(-t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad x(f),$$

dass

$$\widehat{x}(f) = 2\begin{cases} 1 - \frac{|f|}{2}, & |f| \leq 2 \\ 0, & |f| > 2 \end{cases}.$$

(b) Wir schreiben $x_a(t)$ gemäss

$$x_a(t) = x(t)p(t),$$

wobei

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{k}{3}\right).$$

Die Fouriertransformierte $\widehat{p}(f)$ von $p(t)$ ergibt sich gemäss Gleichung 20 in der Formelsammlung als

$$\widehat{p}(f) = 3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - 3k).$$

Aus Gleichung 8 in der Formelsammlung folgt somit

$$\widehat{x}_a(f) = (\widehat{x} * \widehat{p})\,(f) = 3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(f - 3k). \tag{1}$$

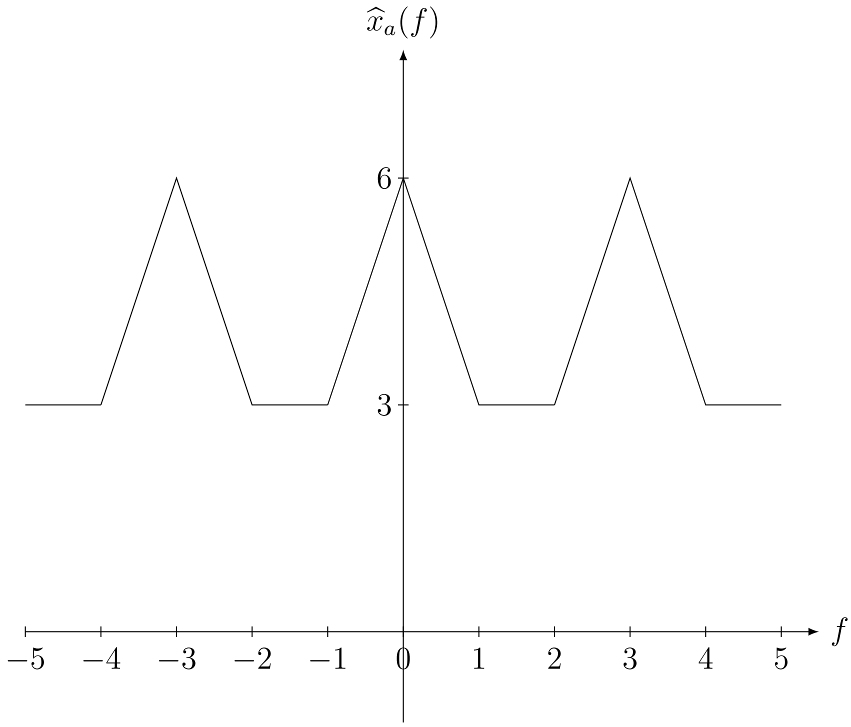
(c) Aus Gleichung (1) geht hervor, dass $\widehat{x}_a(f)$ periodisch ist mit Periode 3. Deshalb reicht es $\widehat{x}_a(f)$ explizit für den Bereich $f \in [-1, 2]$ zu bestimmen. Da $\widehat{x}(f) = 0$ für $|f| > 2$, gilt

$$\widehat{x}_a(f) = 3\,\widehat{x}(f) = 6 - 3|f|, \qquad \text{für} \quad f \in [-1, 1)$$

und

$$\begin{aligned} \widehat{x}_a(f) &= 3\,(\widehat{x}(f) + \widehat{x}(f-3)) = 3\,(2 - |f| + 2 - |f-3|) && (2) \\ &= 3\,(4 - f + (f-3)) = 3, \qquad \text{für} \quad f \in [1, 2]. && (3) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir folgende Darstellung für $\widehat{x}_a(f)$:



(d) Mit $a = 2$, $b = 0$ und $c = 1$, ist $\widehat{h}_{\mathrm{TP}}(f)$ gegeben durch

$$\widehat{h}_{\mathrm{TP}}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq 2 \\ 0, & |f| > 2 \end{cases}.$$

Somit erhält man $\widehat{y}(f)$ gemäss

$$\widehat{y}(f) = \widehat{x}_a(f)\widehat{h}_{\mathrm{TP}}(f) = 3\left(\widehat{v}(f) + \widehat{w}(f)\right)$$

wobei

$$\widehat{v}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq 2 \\ 0, & |f| > 2 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \widehat{w}(f) = \begin{cases} 1 - |f|, & |f| \leq 1 \\ 0, & |f| > 1 \end{cases}.$$

Aus Gleichung 27 in der Formelsammlung folgt

$$v(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}$$

und aus Gleichung 29 in der Formelsammlung ergibt sich, unter Verwendung der Dualität der Fouriertransformation,

$$w(t) = \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2 t^2}.$$

Zusammenfassend ergibt das

$$y(t) = 3\left(\frac{\sin(4\pi t)}{\pi t} + \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2 t^2}\right).$$

(e) Wir wählen $a = 1$, $b = 1$ und $c = \frac{1}{3}$ und zeigen, dass mit dieser Wahl $\widehat{x}(f) = \widehat{y}(f)$ und somit $x(t) = y(t)$ gilt. Wir unterscheiden drei Bereiche in Bezug auf $f \in \mathbb{R}$. Für $f \in (-1, 1)$ gilt

$$\widehat{y}(f) = \widehat{x}_a(f)\widehat{h}_{\mathrm{TP}}(f) = \frac{1}{3}(6 - 3|f|) = 2 - |f| = \widehat{x}(f).$$

Für $f \in [-2, -1] \cup [1, 2]$ erhalten wir

$$\widehat{y}(f) = \widehat{x}_a(f)\widehat{h}_{\mathrm{TP}}(f) = 3 \cdot \frac{1}{3}(2 - |f|) = 2 - |f| = \widehat{x}(f).$$

Schliesslich gilt für $f \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, $\widehat{h}_{\mathrm{TP}}(f) = 0$, und damit

$$\widehat{y}(f) = \widehat{x}_a(f)\widehat{h}_{\mathrm{TP}}(f) = 0 = \widehat{x}(f).$$

Damit haben wir in Summe gezeigt, dass $\widehat{x}(f) = \widehat{y}(f)$, $\forall f$, woraus $x(t) = y(t)$ folgt.

Aufgabe 3

(a) i. Wie verwenden

$$x[-n] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(z^{-1}) \text{ (Formelsammlung 99)}$$
$$nx[n] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -z\frac{dX(z)}{dz} \text{ (Formelsammlung 97)}$$

und erhalten damit durch zweimalige Anwendung von Gleichung 97 in der Formelsammlung

$$n^2x[n] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -z\frac{d(-z\frac{dX(z)}{dz})}{dz} = z\,\frac{dX(z)}{dz} + z^2\,\frac{d^2X(z)}{dz}.$$

Schliesslich ergibt sich durch Linearität der $\mathcal{Z}$-Transformation

$$Y(z) = X(z^{-1}) + z\,\frac{dX(z)}{dz} + z^2\,\frac{d^2X(z)}{dz}.$$

ii. Wir verwenden $\sum_{n\in\mathbb{Z}} y[n] = Y(1)$ gemeinsam mit $Y(z) = X(z^{-1}) + z\,\frac{dX(z)}{dz} + z^2\,\frac{d^2X(z)}{dz}$ und erhalten damit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} y[n] = X(1) + X'(1) + X''(1)$.

(b) i. Aus dem Pol-Nullstellen Diagramm liest man ab

$$H(z) = \frac{z^2(z-\sqrt{w})}{(z-w)(z-w^2)(z-\sqrt{w})} = \frac{z^2}{(z-w)(z-w^2)} = \frac{z^2}{z^2-(w+w^2)z+w^3}.$$

Mit $w^3 = 1$ und $w + w^2 = -1$ kann man den obigen Ausdruck vereinfachen gemäss

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2+z+1} = \frac{1}{1+z^{-1}+z^{-2}}.$$

ii. Wir berechnen zuerst die Partialbruchzerlegung von $H(z) = \frac{z^2}{(z-w)(z-w^2)}$. Der Grad des Zählers ist gleich dem des Nenners. Daher ist die Zerlegung von der Form

$$H(z) = B_1 + \frac{A_1}{(z-w)} + \frac{A_2}{(z-w^2)}.$$

Durch Polynomdivision erhält man

$$H(z) = 1 - \frac{(z+1)}{(z-w)(z-w^2)}.$$

Nun schreiben wir

$$\frac{(z+1)}{(z-w)(z-w^2)} = \frac{A_1}{(z-w)} + \frac{A_2}{(z-w^2)}$$

mit

$$A_1 = -(z-w)\frac{(z+1)}{(z-w)(z-w^2)}\Big|_{z=w} = -\frac{w+1}{w-w^2} = \frac{w^2}{w-w^2} = \frac{w}{1-w}$$

und

$$A_2 = -(z-w^2)\frac{(z+1)}{(z-w)(z-w^2)}\Big|_{z=w^2} = -\frac{w^2+1}{w^2-w} = \frac{w}{w^2-w} = \frac{1}{w-1}.$$

Somit folgt

$$H(z) = 1 + \frac{\frac{w}{1-w}}{(z-w)} + \frac{\frac{1}{w-1}}{(z-w^2)}.$$

Mit den Gleichungen 94, 95, 105 und 108 in der Formelsammlung berechnen wir die Rücktransformierte, unter Berücksichtigung der Kausalitätsbedingung, als

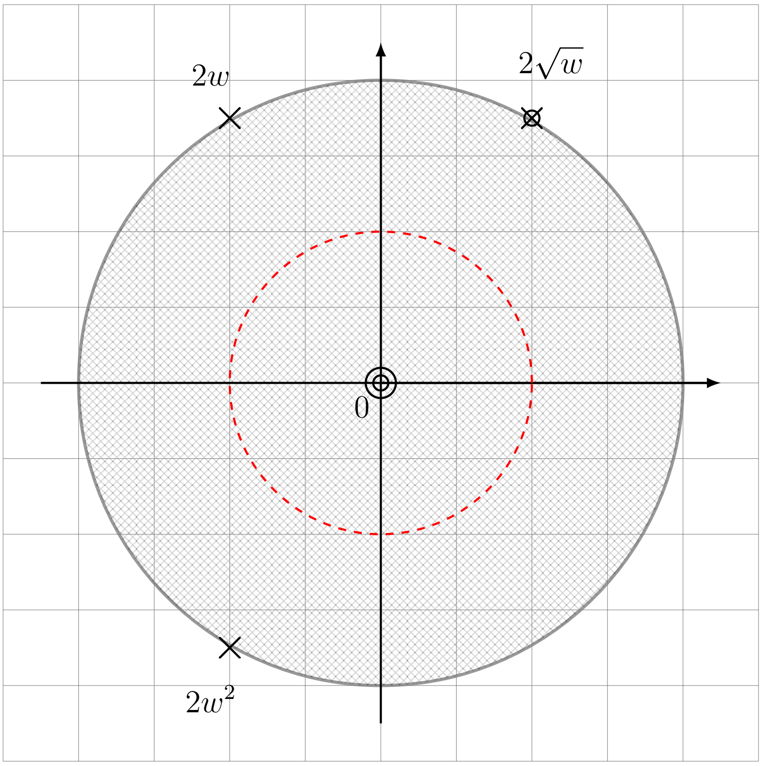
$$h[n] = \delta[n] + \frac{w}{1-w}w^{n-1}\sigma[n-1] + \frac{1}{w-1}w^{2(n-1)}\sigma[n-1],$$

wobei die ROC gegeben ist durch $|z| > |w| = |w^2| = 1$.

iii. Da $H(z)$ Pole auf dem Einheitskreis hat, gibt es keine ROC für $H(z)$, so dass das System BIBO-stabil ist. Für $H(z/2)$ hingegen werden die Pole radial auf den Kreis mit Radius 2 skaliert (s. die Abbildung unten). Daher sind die Pole nicht mehr auf dem Einheitskreis, und somit gibt es eine ROC für die das System BIBO-stabil ist. Diese ROC ist gegeben durch $|z| < 2$. Beachten Sie jedoch, dass das zugrundeliegende System nicht kausal ist.

(c) Der Beweis erfolgt durch direktes Einsetzen gemäss

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} X\left(z^{1/M}\mathrm{e}^{\frac{2\pi i m}{M}}\right) &= \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]z^{-n/M}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i m n}{M}} \\
&= \frac{1}{M}\sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]z^{-n/M} \underbrace{\sum_{m=0}^{M-1}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i m n}{M}}}_{=\begin{cases} M, & \text{für } n = kM, k\in\mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst}\end{cases}} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[kM]z^{-k}.
\end{aligned}$$


$2w$
$2\sqrt{w}$
0
$2w^2$

Aufgabe 4

(a) Wir setzen $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$ und formen den Ausdruck für die inverse N-Punkt DFT $x[n]$ von $\hat{x}[k]$ wie folgt um:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k]\omega_N^{-kn} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N/2-1} \hat{x}[2r]\omega_N^{-n2r} + \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N/2-1} \hat{x}[2r+1]\omega_N^{-n(2r+1)} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N/2-1} \hat{x}[2r](\omega_N^2)^{-nr} + \frac{\omega_N^{-n}}{N}\sum_{r=0}^{N/2-1} \hat{x}[2r+1](\omega_N^2)^{-nr}. \end{aligned}$$

Nun verwendet man die zentrale Eigenschaft

$$\omega_N^2 = \omega_{N/2}, \tag{4}$$

und erhält damit

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N/2-1} \hat{x}[2r]\omega_{N/2}^{-nr} + \frac{\omega_N^{-n}}{N}\sum_{r=0}^{N/2-1} \hat{x}[2r+1]\omega_{N/2}^{-nr} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N/2-1} \hat{g}[r]\omega_{N/2}^{-nr} + \frac{\omega_N^{-n}}{N}\sum_{r=0}^{N/2-1} \hat{u}[r]\omega_{N/2}^{-nr} \\ &= \frac{1}{2}(g[n] + \omega_N^{-n}u[n]), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \end{aligned}$$

wobei die $(N/2)$-periodischen Signale $g[n]$ und $u[n]$ wie folgt gegeben sind:

$$\begin{aligned} g[n] &= \frac{2}{N}\sum_{r=0}^{N/2-1} \hat{g}[r]\omega_{N/2}^{-nr} \\ u[n] &= \frac{2}{N}\sum_{r=0}^{N/2-1} \hat{u}[r]\omega_{N/2}^{-nr}. \end{aligned}$$

(b) i. Das Resultat aus Teilaufgabe (a) für $N = 8$ besagt, dass die inverse 8-Punkt DFT $x[n]$ von $\hat{x}[k]$ gegeben ist durch

$$x[n] = \frac{1}{2}(g[n] + \omega_8^{-n}u[n]), \quad n = 0, 1, \ldots, 7, \tag{5}$$

mit den 4-periodischen Signalen

$$g[n] = \frac{1}{4}\sum_{r=0}^{N/2-1} \hat{g}[r]\omega_4^{-nr} \tag{6}$$

$$u[n] = \frac{1}{4}\sum_{r=0}^{N/2-1} \hat{u}[r]\omega_4^{-nr}. \tag{7}$$

Wir verfahren nun iterativ, indem wir die inversen 4-Punkt DFTs in (6) und (7) mit Hilfe des Resultats aus Teilaufgabe (a) für $N = 4$ berechnen. Für $g[n]$ erhalten wir damit

$$g[n] = \frac{1}{2}(g_{\mathrm{g}}[n] + \omega_4^{-n} u_{\mathrm{g}}[n]), \quad n = 0, 1, \ldots, 3, \tag{8}$$

wobei

$$g_{\mathrm{g}}[n] = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{1} \hat{g}_{\mathrm{g}}[r] \omega_2^{-nr} \tag{9}$$

$$u_{\mathrm{g}}[n] = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{1} \hat{u}_{\mathrm{g}}[r] \omega_2^{-nr}, \tag{10}$$

mit den 2-periodischen Signalen $\hat{g}_{\mathrm{g}}[r]$ und $\hat{u}_{\mathrm{g}}[r]$ wie folgt:

$$\hat{g}_{\mathrm{g}}[r] = \hat{g}[2r] = \hat{x}[4r], \quad r = 0, 1 \tag{11}$$

$$\hat{u}_{\mathrm{g}}[r] = \hat{g}[2r+1] = \hat{x}[4r+2], \quad r = 0, 1. \tag{12}$$

Einsetzen von (11) in (9) und (12) in (10) ergibt

$$g_{\mathrm{g}}[n] = \frac{1}{2}(\hat{x}[0] + \omega_2^{-n} \hat{x}[4]), \quad n = 0, 1, \ldots, 3 \tag{13}$$

$$u_{\mathrm{g}}[n] = \frac{1}{2}(\hat{x}[2] + \omega_2^{-n} \hat{x}[6]), \quad n = 0, 1, \ldots, 3. \tag{14}$$

Schliesslich setzen wir (13) und (14) in (8) ein und bekommen

$$g[n] = \frac{1}{4}(\hat{x}[0] + \omega_2^{-n} \hat{x}[4] + \omega_4^{-n}(\hat{x}[2] + \omega_2^{-n} \hat{x}[6])), \quad n = 0, 1, \ldots, 3. \tag{15}$$

Für $u[n]$ erhalten wir durch folgende (analoge) Vorgangsweise

$$u[n] = \frac{1}{2}(g_{\mathrm{u}}[n] + \omega_4^{-n} u_{\mathrm{u}}[n]), \quad n = 0, 1, \ldots, 3, \tag{16}$$

wobei

$$g_{\mathrm{u}}[n] = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{1} \hat{g}_{\mathrm{u}}[r] \omega_2^{-nr} \tag{17}$$

$$u_{\mathrm{u}}[n] = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{1} \hat{u}_{\mathrm{u}}[r] \omega_2^{-nr}, \tag{18}$$

mit den 2-periodischen Signalen $\hat{g}_{\mathrm{u}}[r]$ und $\hat{u}_{\mathrm{u}}[r]$ wie folgt:

$$\hat{g}_{\mathrm{u}}[r] = \hat{u}[2r] = \hat{x}[4r+1], \quad r = 0, 1 \tag{19}$$

$$\hat{u}_{\mathrm{u}}[r] = \hat{u}[2r+1] = \hat{x}[4r+3], \quad r = 0, 1. \tag{20}$$

Einsetzen von (19) in (17) und (20) in (18) ergibt

$$g_{\mathrm{u}}[n] = \frac{1}{2}(\hat{x}[1] + \omega_2^{-n} \hat{x}[5]), \quad n = 0, 1, \ldots, 3 \tag{21}$$

$$u_{\mathrm{u}}[n] = \frac{1}{2}(\hat{x}[3] + \omega_2^{-n}\hat{x}[7]), \quad n = 0, 1, \ldots, 3. \tag{22}$$

Schliesslich setzen wir (21) und (22) in (16) ein und bekommen

$$u[n] = \frac{1}{4}(\hat{x}[1] + \omega_2^{-n}\hat{x}[5] + \omega_4^{-n}(\hat{x}[3] + \omega_2^{-n}\hat{x}[7])), \quad n = 0, 1, \ldots, 3. \tag{23}$$

Einsetzen von (15) und (23) in (5) ergibt das finale Resultat

$$x[n] = \frac{1}{8}\big(\hat{x}[0] + \omega_2^{-n}\hat{x}[4] + \omega_4^{-n}(\hat{x}[2] + \omega_2^{-n}\hat{x}[6]) \tag{24}$$

$$+ \omega_8^{-n}(\hat{x}[1] + \omega_2^{-n}\hat{x}[5] + \omega_4^{-n}(\hat{x}[3] + \omega_2^{-n}\hat{x}[7]))\big), \quad n = 0, 1, \ldots, 7. \tag{25}$$

ii. Für den Spezialfall $n = 4$ gilt $\omega_2^{-4} = \omega_4^{-4} = 1$ und $\omega_8^{-4} = -1$. Die Formel (24)–(25) vereinfacht sich damit für $n = 4$ zu

$$x[4] = \frac{1}{8}\big(\hat{x}[0] + \hat{x}[2] + \hat{x}[4] + \hat{x}[6] - \hat{x}[1] - \hat{x}[3] - \hat{x}[5] - \hat{x}[7]\big).$$

Folglich benötigen wir für die Berechnung von $x[4]$ eine Multiplikation, 3 Additionen, und 4 Subtraktionen.

(c) Anwendung des Resultats aus Teilaufgabe (b)i. ergibt

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{8}\big(\hat{x}[0] + \omega_2^{-n}\hat{x}[4] + \omega_4^{-n}(\hat{x}[2] + \omega_2^{-n}\hat{x}[6]) \\ &\quad + \omega_8^{-n}(\hat{x}[1] + \omega_2^{-n}\hat{x}[5] + \omega_4^{-n}(\hat{x}[3] + \omega_2^{-n}\hat{x}[7]))\big) \\ &= \frac{1}{8}\big(1 + \omega_2^{-n} + \omega_4^{-n}(1 + \omega_2^{-n}) - \omega_8^{-n}(1 + \omega_2^{-n} + \omega_4^{-n}(1 + \omega_2^{-n}))\big). \end{aligned} \tag{26}$$

Verwendung von $\omega_2^{-n} = (-1)^n$ in (26) ergibt weiters

$$x[n] = 0, \quad n \in \{1, 3, 5, 7\}$$

und

$$x[n] = \frac{1}{4}\big(1 + \omega_4^{-n} - \omega_8^{-n}(1 + \omega_4^{-n})\big), \quad n \in \{0, 2, 4, 6\}. \tag{27}$$

Explizite Auswertung von ω_4^{-n} und ω_8^{-n} in (27) für $n \in \{0, 2, 4, 6\}$ ergibt

$$x[0] = x[2] = x[6] = 0$$

und $x[4] = 1$. Die gesuchte inverse DFT ist also $(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$.