

Klausur zu Signal- und Systemtheorie I

10. August 2023

Bitte beachten Sie:

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung ist die Formelsammlung erlaubt, die Sie von uns erhalten. Die Benutzung von Rechnern/Smartphones/Tablets jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug. Falls zwei oder mehr alternative Lösungswege für dieselbe Aufgabe vorgelegt werden, können keine Punkte für diese Aufgabe vergeben werden.
- Aufgabenteile, die mit einem ★ gekennzeichnet sind, können unabhängig von vorhergehenden Aufgabenteilen gelöst werden.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen darauf hin, dass Sie der "Disziplinarverordnung ETH Zürich" unterstehen.

Vor der Klausur:

1. Dieses Angabenheft hat 8 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie bitte sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein und unterschreiben Sie.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen ausschliesslich auf die bereitgestellten leeren Blätter. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie weitere Blätter. Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Ihrem Namen.

Nach der Klausur:

5. Legen Sie alle ihre Lösungsblätter und alle Aufgabenblätter auf einen Stapel zur Abgabe bereit (ohne Formelsammlung). Alle Aufgabenblätter müssen abgegeben werden. Räumen Sie dann bitte Ihr Pult auf und warten Sie bis Sie den Raum gestaffelt Reihe für Reihe verlassen können.

Nachname: Vorname:

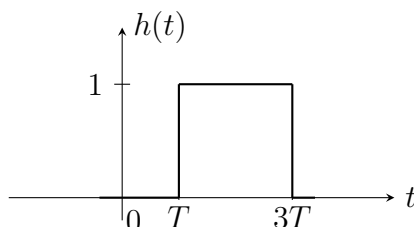
Legi-Nr.:

Unterschrift:

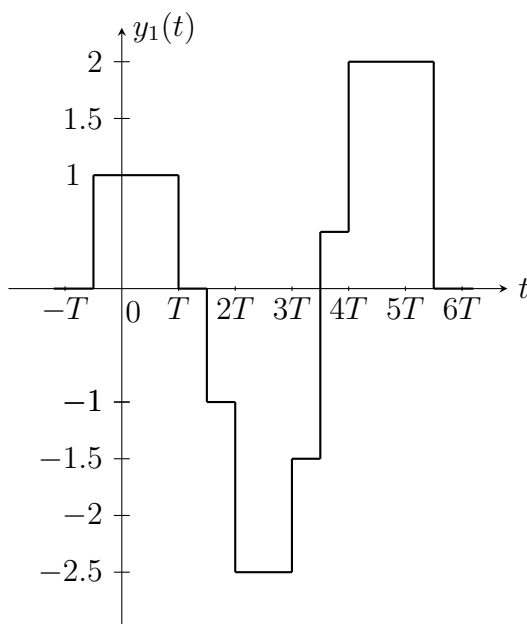
Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (17 Punkte) Gegeben ist das LTI-System H mit der Impulsantwort

$$h(t) = \begin{cases} 1, & T \leq t \leq 3T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \text{mit } T > 0.$$



- ★ i. (2 Punkte) Ist das System H kausal? Begründen Sie Ihre Antwort.
- ★ ii. (4 Punkte) Am Ausgang des Systems H wird das Signal $y_1(t)$ gemessen, wobei $y_1(t) = 0$ für $t < -T/2$ und $t > 11 \cdot T/2$.



Bestimmen Sie das zu $y_1(t)$ gehörige Eingangssignal $x_1(t)$ in Abhängigkeit von T .

- ★ iii. (5 Punkte) Am Eingang des Systems H liegt das Signal $x_2(t)$ gemäss

$$x_2(t) = Ae^{\pi i(t-t_0)/T} + c, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } t_0, c \in \mathbb{R} \text{ und } A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Das zu $x_2(t)$ gehörige Ausgangssignal wird mit $y_2(t)$ bezeichnet. Bestimmen Sie die Wertebereiche von A , t_0 , und c , sodass $y_2(t) = 0$, für alle $t \in \mathbb{R}$, gilt.

- ★ iv. (6 Punkte) Am Eingang des Systems H liegt das Signal

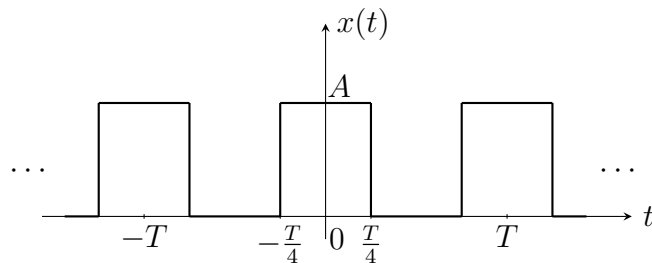
$$x_3(t) = \frac{1}{2T} r_T(t) - \delta(t+T) - \delta(t-T)$$

an, wobei

$$r_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}.$$

Bestimmen und skizzieren Sie das zugehörige Ausgangssignal $y_3(t)$ in Abhängigkeit von T . Bitte beschriften Sie die Achsen in Ihrer Skizze.

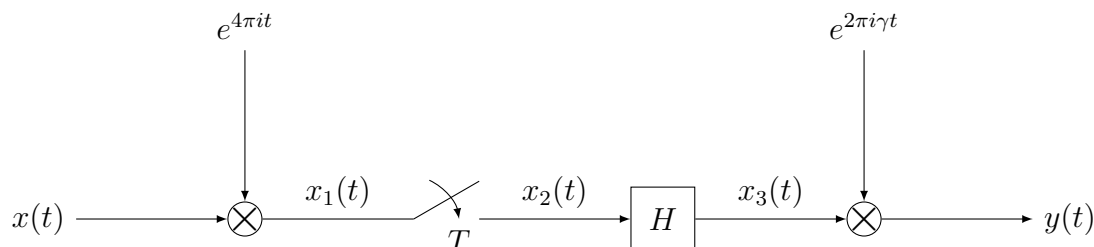
- (b) (8 Punkte) Gegeben ist das periodische Signal $x(t)$:



- ★ i. (4 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der Fourierreihe $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t / T}$ in Abhängigkeit von A .
- ii. (4 Punkte) Vereinfachen Sie den Ausdruck für c_k in Punkt i. dieser Teilaufgabe für ungerades k ($k = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}$) und für gerades k ($k = 2m, m \in \mathbb{Z}, k \neq 0$) so weit wie möglich.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

Gegeben sei folgendes System, wobei $T, \alpha, \beta \in [0, \infty)$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind.



$x_2(t)$ ist ein zeitkontinuierliches Signal gegeben durch

$$x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(kT)\delta(t - kT)$$

und das Tiefpassfilter H ist ein LTI-System mit Frequenzgang

$$\hat{h}(f) = \begin{cases} \beta, & \text{für } |f| \leq \alpha \\ 0, & \text{für } |f| > \alpha \end{cases}, \quad \text{für } f \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten in der gesamten Aufgabe nur Eingangssignale $x(t)$ die auf $(-1, 1)$ bandbegrenzt sind, d.h.

$$\hat{x}(f) = 0, \text{ für } |f| \geq 1. \quad (1)$$

- ★ (a) (2 Punkte) Geben Sie das kleinste f_0 an, sodass $\hat{x}_1(f) = 0$, für $|f| \geq f_0$ gilt, für alle Eingangssignale $x(t)$ die (1) erfüllen.
- ★ (b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{x}_2(f)$ von $x_2(t)$ und stellen Sie diese als Funktion von $\hat{x}(f)$ dar.
- ★ (c) (3 Punkte) Wir definieren die Funktion $v(t) := \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2 t^2}$. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{v}(f)$ von $v(t)$.
- (d) Sei nun $T = \frac{1}{8}$.
 - i. (4 Punkte) Skizzieren Sie $\hat{x}_2(f)$ im Bereich $f \in [-7, 7]$ für das spezielle Eingangssignal $x(t) = v(t)$. Bitte beschriften Sie die Achsen in der Skizze.
 - ii. (4 Punkte) Gibt es Werte $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ und $\gamma \in \mathbb{R}$, sodass $y(t) = x(t)$ gilt für alle Eingangssignale $x(t)$ die (1) erfüllen? Falls ja, geben Sie alle diese Werte an. Begründen Sie Ihre Antwort.
- (e) Sei nun $T = \frac{1}{2}$.
 - i. (4 Punkte) Skizzieren Sie $\hat{x}_2(f)$ im Bereich $f \in [-7, 7]$ für das spezielle Eingangssignal $x(t) = v(t)$. Bitte beschriften Sie die Achsen in der Skizze.

- ii. (4 Punkte) Gibt es Werte $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ und $\gamma \in \mathbb{R}$, sodass $y(t) = x(t)$ gilt für alle Eingangssignale $x(t)$ die (1) erfüllen? Falls ja, geben Sie alle diese Werte an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

- ★ (a) (2 Punkte) Berechnen Sie die inverse \mathcal{Z} -Transformierte von $\exp(az^{-1})$, mit ROC gegeben durch $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Hinweis: Die Taylorreihenentwicklung von e^z ($z \in \mathbb{C}$) lautet $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

- ★ (b) (23 Punkte) Sei $a > 0$ und $H(z) = \frac{z - a}{z^4 - a^4} = \frac{1}{(z - ia)(z + a)(z + ia)}$.
- ★ i. (3 Punkte) Zeichnen Sie das Pol-Nullstellendiagramm von $H(z)$.
 - ★ ii. (2 Punkte) Für welche Werte von $a > 0$ ist $H(z)$ ein IIR-Filter? Begründen Sie Ihre Antwort.
 - ★ iii. (3 Punkte) Für welche Werte von $a > 0$ ist $H(z)$ zugleich kausal und stabil? Geben Sie die entsprechende ROC an und begründen Sie Ihre Antwort.
 - ★ iv. (4 Punkte) Geben Sie die zum System mit Übertragungsfunktion $H(z)$ gehörige Differenzgleichung an.
 - v. (3 Punkte) Zeichnen Sie das zu $H(z)$ entsprechende Schaltbild unter Verwendung von Addierern, Multiplizierern und Verzögerungselementen.
 - ★ vi. (8 Punkte) Berechnen Sie das antikausale Ausgangssignal $y[n]$ (d.h. $y[n] = 0$, für $n > 0$) des Systems mit Transferfunktion $H(z)$ für das Eingangssignal $x[n] = ia\delta[n] + \delta[n + 1]$.
- Hinweis:* Berechnen Sie zuerst $Y(z)$ und transformieren Sie dann in den Zeitbereich um $y[n]$ zu erhalten.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

- ★(a) (11 Punkte) Sei N eine gerade natürliche Zahl und $x = (x[0], \dots, x[N-1])^T \in \mathbb{C}^N$ ein N -periodisches Signal. Für ein beliebiges $\zeta \in \mathbb{C}$ betrachten wir das Signal $y = (y[0], \dots, y[N-1])^T \in \mathbb{C}^N$, wobei

$$y[n] := \begin{cases} \zeta x[n], & \text{falls } n \in \{0, N/2\}, \\ x[n], & \text{falls } n \notin \{0, N/2\}, \end{cases} \quad n \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (2)$$

- ★ i. (6 Punkte) Zeigen Sie, dass die N -Punkt DFT des Signals y folgende Beziehung erfüllt:

$$\hat{y}[k] = \hat{x}[k] + (\zeta - 1) (x[0] + (-1)^k x[N/2]), \quad k \in \{0, \dots, N-1\}, \quad (3)$$

wobei $\hat{x} = (\hat{x}[0], \dots, \hat{x}[N-1])^T$ die N -Punkt DFT von x bezeichnet.

- ★ ii. (3 Punkte) Verwenden Sie (3), um $\|\hat{x} - \hat{y}\|_2$ zu berechnen. Hier bezeichnet $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm.
- ★ iii. (2 Punkte) Berechnen Sie $\|x - y\|_2$ anhand von (2).

- ★(b) (7 Punkte) Seien $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $N := N_1 N_2$ und $x = (x[0], \dots, x[N-1])^T \in \mathbb{C}^N$ ein N -periodisches Signal, dessen N -Punkt DFT mit $\hat{x} \in \mathbb{C}^N$ bezeichnet wird. Für ein festes $m \in \{0, \dots, N_1 - 1\}$ definieren wir das Signal $u_m = (u_m[0], \dots, u_m[N_2 - 1])^T \in \mathbb{C}^{N_2}$ gemäss

$$u_m[n] := x[nN_1 + m], \quad n \in \{0, \dots, N_2 - 1\}.$$

Wir bezeichnen mit \hat{u}_m die N_2 -Punkt DFT von u_m . Des Weiteren definieren wir für ein festes $j \in \{0, \dots, N_2 - 1\}$ das Signal $v_j = (v_j[0], \dots, v_j[N_1 - 1])^T \in \mathbb{C}^{N_1}$ wie folgt:

$$v_j[n] := \hat{u}_m[j] e^{-i2\pi nj/N}, \quad n \in \{0, \dots, N_1 - 1\},$$

dessen N_1 -Punkt DFT wir mit \hat{v}_j bezeichnen. Zeigen Sie, dass

$$\hat{x}[k_1 N_2 + k_2] = \hat{v}_j[k_1], \quad (4)$$

wobei $k_1 \in \{0, \dots, N_1 - 1\}$ und $k_2 \in \{0, \dots, N_2 - 1\}$.

- ★(c) (7 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f: x \mapsto T(x \bmod 2\pi)$, $x \in \mathbb{R}$, wobei

$$T(x) := \begin{cases} \frac{x}{\pi}, & \text{für } 0 \leq x < \pi, \\ 2 - \frac{x}{\pi}, & \text{für } \pi \leq x < 2\pi, \end{cases} \quad x \in [0, 2\pi).$$

Hierbei bezeichnet $x \bmod 2\pi$, für $x \in \mathbb{R}$, die eindeutige Zahl $r \in [0, 2\pi)$, sodass $x = r + 2\pi m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie ein trigonometrisches Polynom der Form

$$p(x) := \sum_{n=0}^3 (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, sodass $p(x_k) = f(x_k)$ für alle $x_k = \pi k/2, k \in \mathbb{Z}$.