Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Professur für Mathematische Informationswissenschaften
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Lösung zur
Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
10. August 2023

Aufgabe 1

(a) i. Ja, da die Impulsantwort für alle $t < 0$ gleich Null ist.

ii. Das Ausgangssignal $y_1(t)$ lässt sich aus einer Superposition verschobener Versionen der Impulsantwort $h(t)$, gemäss

$$y_1(t) = h\left(t + \frac{3T}{2}\right) - h(t) - \frac{3}{2}h(t-T) + 2h\left(t - \frac{5T}{2}\right)$$

darstellen. Daraus folgt, dass das Eingangssignal gegeben ist durch

$$x_1(t) = \delta\left(t + \frac{3T}{2}\right) - \delta(t) - \frac{3}{2}\delta(t-T) + 2\delta\left(t - \frac{5T}{2}\right).$$

iii. Das Signal $y_2(t)$ wird durch Faltung berechnet:

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= (x_2 * h)(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{t-3T}^{t-T} \left(Ae^{\pi i(\tau - t_0)/T} + c\right) d\tau \\
&= \left(\frac{T}{\pi i}Ae^{\pi i(\tau - t_0)/T} + c\tau\right)\Bigg|_{t-3T}^{t-T} \\
&= \left(\frac{T}{\pi i}Ae^{\pi i(t-T-t_0)/T} + c(t-T)\right) - \left(\frac{T}{\pi i}Ae^{\pi i(t-3T-t_0)/T} + c(t-3T)\right) \\
&= \frac{T}{\pi i}\left(Ae^{\pi i(t-T-t_0)/T} - Ae^{\pi i(-2T)/T}e^{\pi i(t-T-t_0)/T}\right) + c(t-T) - c(t-3T).
\end{aligned}$$

Da $e^{\pi i(-2T)/T} = 1$, summieren sich die beiden Exponentialterme zu Null. Es bleibt somit

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= c(t-T) - c(t-3T) = 2cT \\
y_2(t) &\stackrel{!}{=} 0 \implies c = 0.
\end{aligned}$$

Damit folgt, dass $y_2(t) = 0$, für alle $t \in \mathbb{R}$, wenn $c = 0$, wobei $t_0 \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ beliebig sein können.

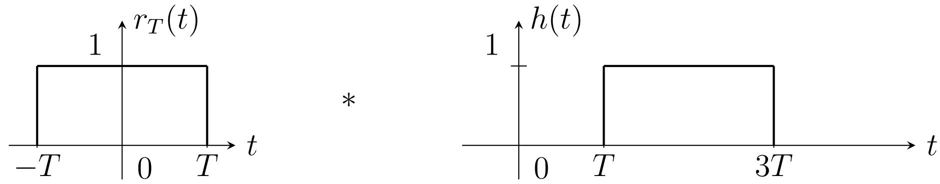
iv. Das Ausgangssignal $y_3(t)$ wird durch Faltung berechnet gemäss

$$\begin{aligned} y_3(t) &= (x_3 * h)(t) \\ &= \left(\frac{1}{2T} r_T(t) - \delta(t+T) - \delta(t-T)\right) * h(t) \\ &= \frac{1}{2T}(r_T * h)(t) - h(t+T) - h(t-T). \end{aligned}$$

Zunächst bestimmen wir die Funktion

$$d(t) := (r_T * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r_T(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

mit Fallunterscheidung in Bezug auf t durch graphische Faltung.



Konkret folgt für $t < 0$ und $t > 4T$, dass $d(t) = 0$. Auf dem Intervall $t \in [0, 2T]$ hat die Funktion $d(t)$ den Verlauf

$$d(t) = t.$$

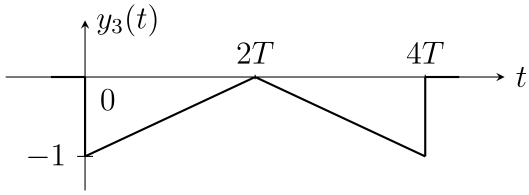
Auf dem Intervall $t \in [2T, 4T]$ hat die Funktion $d(t)$ einen abfallenden Verlauf gemäss

$$d(t) = 4T - t.$$

Wir erhalten nun das Signal $y_3(t)$ gemäss

$$\begin{aligned} y_3(t) &= \frac{1}{2T} d(t) - h(t+T) - h(t-T) \\ &= \begin{cases} t/(2T) - 1, & 0 \le t < 2T \\ -t/(2T) + 1, & 2T \le t < 4T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

Die Funktion $y_3(t)$ kann damit wie folgt skizziert werden.



(b) i. Für $k = 0$, erhalten wir

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} A\, dt = \frac{A}{2}.$$

Für $k \neq 0$, berechnen sich die Koeffizienten der Fourierreihe wie folgt

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-2\pi ikt/T}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} Ae^{-2\pi ikt/T}dt \\ &= -\frac{A}{2\pi ik}e^{-2\pi ikt/T}\Big|_{-T/4}^{T/4} \\ &= -\frac{A}{2\pi ik}(e^{-\pi ik/2} - e^{\pi ik/2}) = \frac{A}{\pi k}\sin(\pi k/2). \end{aligned}$$

ii. Für $k = 2m, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$, erhält man

$$c_k = \frac{A}{2\pi m}\sin(2\pi m/2) = \frac{A}{2\pi m}\sin(\pi m) = 0.$$

Für $k = 2m+1, m \in \mathbb{Z}$, gilt

$$c_k = \frac{A}{\pi(2m+1)}\sin(\pi(2m+1)/2) = (-1)^m\frac{A}{\pi(2m+1)} = (-1)^{\frac{k-1}{2}}\frac{A}{\pi k}.$$

Aufgabe 2

(a) Es gilt $x_1(t) = e^{4\pi i t} x(t)$. Aus Formel 3 in der Formelsammlung ergibt sich $\widehat{x}_1(f) = \widehat{x}(f-2)$. Aus $\widehat{x}(f) = 0$ für $|f| \geq 1$ folgt somit $\widehat{x}_1(f) = 0$ für $|f| \geq 3 =: f_0$.

(b) Wir schreiben $x_2(t)$ gemäss

$$x_2(t) = x_1(t) p(t),$$

wobei

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\,.$$

Die Fouriertransformierte $\widehat{p}(f)$ von $p(t)$ ergibt sich gemäss Formel 20 in der Formelsammlung als

$$\widehat{p}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right).$$

Aus Formel 8 in der Formelsammlung folgt somit

$$\widehat{x}_2(f) = (\widehat{x}_1 * \widehat{p})\,(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}_1\left(f - \frac{k}{T}\right). \tag{1}$$

Unter Verwendung von $\widehat{x}_1(f) = \widehat{x}(f-2)$ erhalten wir schliesslich

$$\widehat{x}_2(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}\left(f - 2 - \frac{k}{T}\right). \tag{2}$$

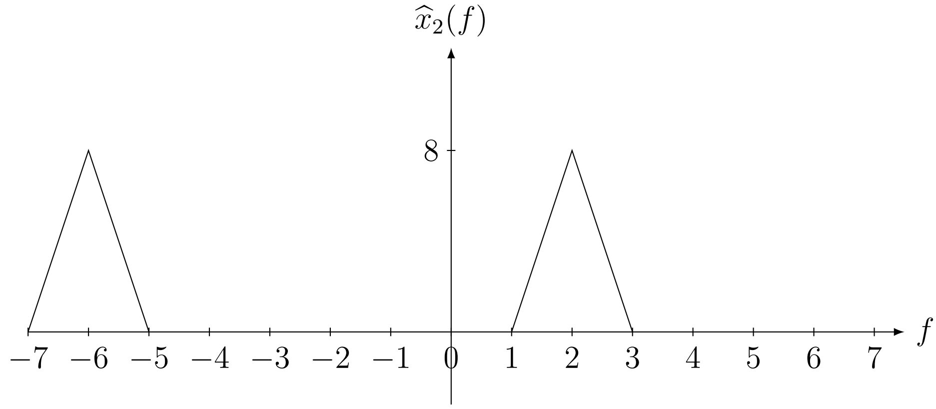
(c) Aus Formel 29 in der Formelsammlung erhalten wir, unter Verwendung der Dualität der Fouriertransformation gemäss

$$\widehat{x}(-t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad x(f)$$

und der Tatsache, dass $v(t) = v(-t)$,

$$\widehat{v}(f) = \begin{cases} 1 - |f|, & |f| \leq 1 \\ 0, & |f| > 1 \end{cases}.$$

(d) i.



ii. H muss so gewählt werden, dass $\widehat{x}_3(f)$ nur eine Kopie der Fouriertransformierten $\widehat{x}(f)$ enthält. Mit $T = 1/8$ folgt aus

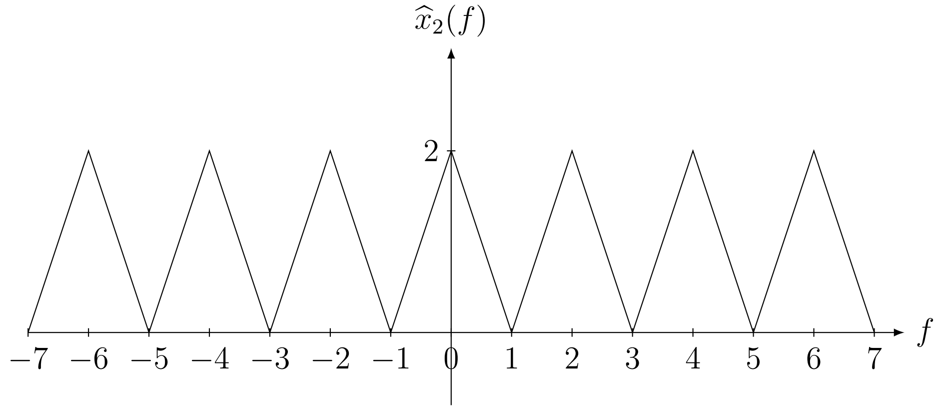
$$\widehat{x}_2(f) = 8 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}\left(f - 2 - 8k\right)$$

und der Bandbegrenzung von $\widehat{x}(f)$, dass $\widehat{x}_2(f)$ nicht-überlappende Kopien von $\widehat{x}(f)$ in den Bereichen

$$\ldots, (-7, -5), (1, 3), (9, 11), \ldots$$

enthält. Somit müssen wir $\alpha \in [3, 5]$ wählen. Zudem muss $\beta = 1/8$ gelten, damit wir $\widehat{x}_3(f) = \widehat{x}(f-2)$ erhalten. Aus $y(t) = e^{2\pi i\gamma t}x_3(t)$ folgt mit der Wahl $\gamma = -2$ und unter Verwendung von Formel 3 in der Formelsammlung, dass $y(t) = x(t)$.

(e) i.



ii. Das Signal $x(t)$ kann am Ausgang des Systems eindeutig rekonstruiert werden, obwohl die Abtastrate $f_s = 1/T = 2$ kleiner ist als die in Teilaufgabe (a) identifizierte kritische Abtastrate $2f_0 = 6$. Dies ist möglich, weil das Spektrum von $\widehat{x}_1(f)$ nicht den gesamten Bereich $(-f_0, f_0)$ einnimmt. Es folgt nun aus

$$\widehat{x}_2(f) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}\left(f - 2 - 2k\right),$$

und der Bandbegrenzung von $\widehat{x}(f)$, dass $\widehat{x}_2(f)$ nicht-überlappende Kopien von $\widehat{x}(f)$ in den Bereichen

$$\ldots,(-3,-1),(-1,1),(1,3),\ldots$$

enthält. Somit ergibt sich mit der Wahl $\alpha = 1$ und $\beta = 1/2$ dass $\widehat{x}_3(f) = \widehat{x}(f)$. Damit muss $\gamma = 0$ gewählt werden, damit $y(t) = x(t)$ für alle gemäss (1) bandbegrenzten Eingangssignale gilt.

Aufgabe 3

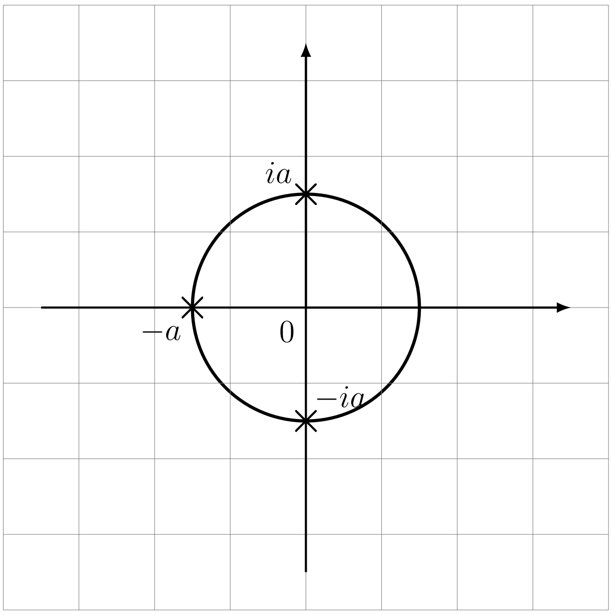
(a) Wir schreiben

$$\exp\left(az^{-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(az^{-1})^n}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a^n}{n!} z^{-n}\sigma[n]$$

und erhalten damit

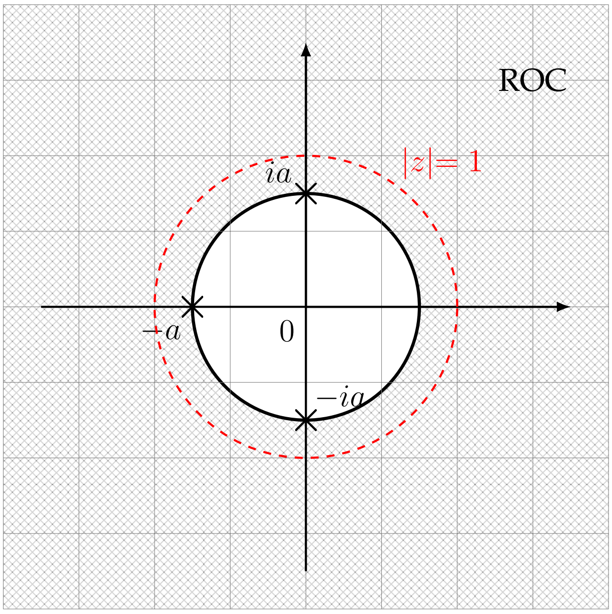
$$\exp\left(az^{-1}\right) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{a^n\sigma[n]}{n!}.$$

(b) i. Das Pol-Nullstellendiagramm von $H(z)$ ist wie folgt:



ii. Das Filter ist auf Grund der Pole in $H(z)$ für jedes $a > 0$ IIR.

iii. Für Kausalität muss $h[n]$ rechtsseitig sein und damit das ROC von der Form $|z| > b$, mit $b \in \mathbb{R}_+$ sein. Für Stabilität muss die ROC zusätzlich den Einheitskreis enthalten. Daher müssen alle Pole innerhalb des Einheitskreises liegen. Es muss also $a < 1$ sein, und die ROC ist somit gegeben durch $|z| > a$, s. die folgende Darstellung.



iv.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-a}{z^4-a^4}$$

$$Y(z)(z^4-a^4) = X(z)(z-a)$$

$$z^4Y(z) - a^4Y(z) = zX(z) - aX(z)$$

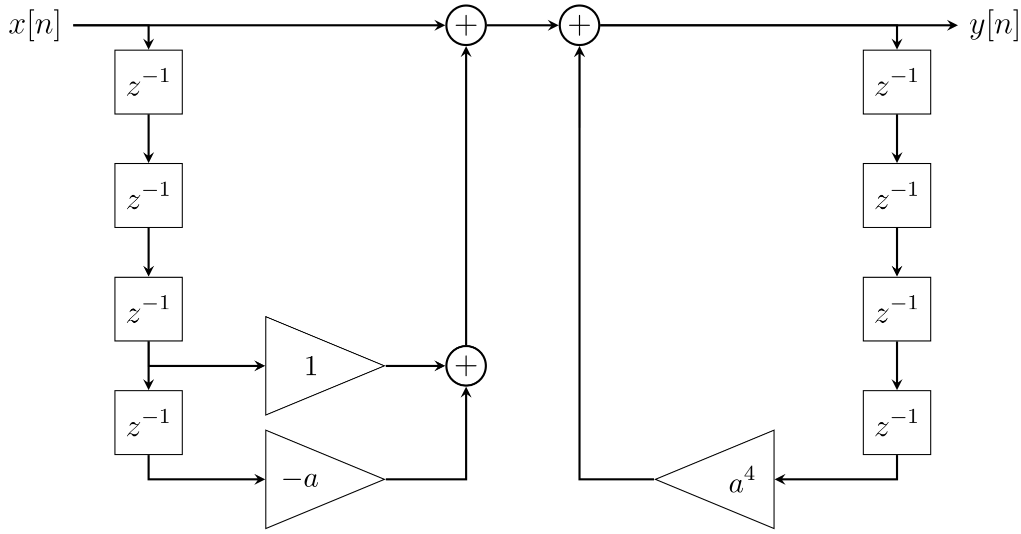
Mit den Formeln 94 und 95 der Formelsammlung können wir rücktransformieren gemäss

$$y[n+4] - a^4y[n] = x[n+1] - ax[n]$$

oder umgeschrieben ($n \to n-4$)

$$y[n] = a^4y[n-4] + x[n-3] - ax[n-4].$$

v. Das Schaltbild ist wie folgt:



vi. $x[n] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad ia + z$ (Formeln 94, 105 und 95 in der Formelsammlung).

$Y(z) = H(z)X(z)$ laut Formel 102 in der Formelsammlung, also

$$Y(z) = \frac{(z+ia)}{(z-ia)(z+a)(z+ia)} = \frac{1}{(z-ia)(z+a)}.$$

Als nächstes berechnen wir die Partialbruchzerlegung von $Y(z)$. Der Grad des Zählers ist kleiner als der des Nenners, daher ist die Partialbruchzerlegung von der Form.

$Y(z) = \dfrac{A_1}{(z-ia)} + \dfrac{A_2}{(z+a)}$, mit

$A_1 = (z-ia)Y(z)|_{z=ia} = \dfrac{1}{a(1+i)}$ und

$A_2 = (z+a)Y(z)|_{z=-a} = -\dfrac{1}{a(1+i)}$.

Damit erhalten wir

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{a(1+i)}}{(z-ia)} - \frac{\frac{1}{a(1+i)}}{(z+a)} = \frac{1}{a(1+i)} z^{-1}\left[\frac{z}{(z-ia)} - \frac{z}{(z+a)}\right].$$

Antikausalität bedingt linksseitiges $y[n]$, und daher ist das Konvergenzgebiet von $H(z)$ gegeben durch $|z| < a$. Mit den Formeln 94, 95 und 109 in der Formelsammlung erhalten wir

$$\frac{1}{a(1+i)} z^{-1}\left[\frac{z}{(z-ia)} - \frac{z}{(z+a)}\right] \quad \bullet\!\!-\!\!\circ$$
$$\frac{1}{a(1+i)}\left[-(ia)^{n-1}\sigma[-n] + (-a)^{n-1}\sigma[-n]\right].$$

Umschreiben liefert nun

$$y[n] = \frac{\sigma[-n]}{a(1+i)}[(-a)^{n-1} - (ia)^{n-1}].$$

Aufgabe 4

(a) i. Wir schreiben $y = x + (\zeta - 1)z$, wobei $z = (z[0], \ldots, z[N-1])^\mathsf{T} \in \mathbb{C}^N$ mit

$$z[n] := \begin{cases} x[n], & \text{falls } n \in \{0, N/2\} \\ 0, & \text{falls } n \notin \{0, N/2\} \end{cases}, \quad n \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

Da die DFT linear ist, gilt $\hat{y} = \hat{x} + (\zeta - 1)\hat{z}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \hat{z}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} z[n] e^{-2\pi i k n/N} \\ &= x[0] + x[N/2] e^{-2\pi i k (N/2)/N} \\ &= x[0] + x[N/2](-1)^k, \quad k \in \{0, \ldots, N-1\}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die gewünschte Identität

$$\hat{y}[k] = \hat{x}[k] + (\zeta - 1)\left(x[0] + (-1)^k x[N/2]\right), \quad k \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

ii. Es gilt

$$\begin{aligned} \|\hat{x} - \hat{y}\|_2^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} |\zeta - 1|^2 \left|x[0] + (-1)^k x[N/2]\right|^2 \\ &= |\zeta - 1|^2 \sum_{k=0}^{N-1} \left(|x[0]|^2 + 2(-1)^k \mathfrak{Re}\{x[0] x^*[N/2]\} + |x[N/2]|^2\right) \\ &= |\zeta - 1|^2 N \left(|x[0]|^2 + |x[N/2]|^2\right), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass N gerade ist. Somit erhalten wir

$$\|\hat{x} - \hat{y}\|_2 = |\zeta - 1| \sqrt{N\left(|x[0]|^2 + |x[N/2]|^2\right)}.$$

iii. Es gilt

$$\|x - y\|_2^2 = |\zeta - 1|^2 \left(|x[0]|^2 + |x[N/2]|^2\right)$$

und damit

$$\|x - y\|_2 = |\zeta - 1| \sqrt{|x[0]|^2 + |x[N/2]|^2}.$$

(b) Beachten Sie zunächst, dass die Abbildungen

$$\{0, \ldots, N_1 - 1\} \times \{0, \ldots, N_2 - 1\} \to \{0, \ldots, N-1\}, (k_1, k_2) \mapsto k_1 N_2 + k_2$$

und

$$\{0, \ldots, N_1 - 1\} \times \{0, \ldots, N_2 - 1\} \to \{0, \ldots, N-1\}, (n_1, n_2) \mapsto n_2 N_1 + n_1$$

wohldefiniert und bijektiv sind. Deshalb können wir $k = k_1 N_2 + k_2$ und $n =$

$n_2N_1 + n_1$ in die Definition der DFT einsetzen und die Summe wie folgt aufspalten:

$$\begin{aligned}
\hat{x}[k_1N_2 + k_2] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi i(k_1N_2+k_2)n/N} \\
&= \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[n_2N_1 + n_1]e^{-2\pi i(k_1N_2+k_2)(n_2N_1+n_1)/N} \\
&= \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[n_2N_1 + n_1]e^{-2\pi i(k_1n_1/N_1+k_2n_2/N_2+k_2n_1/N)} \\
&= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} e^{-2\pi i(k_1n_1/N_1+k_2n_1/N)} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[n_2N_1 + n_1]e^{-2\pi ik_2n_2/N_2} \\
&= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} e^{-2\pi i(k_1n_1/N_1+k_2n_1/N)}\hat{u}_{n_1}[k_2] \\
&= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \hat{u}_{n_1}[k_2]e^{-2\pi ik_2n_1/N}e^{-2\pi ik_1n_1/N_1} \\
&= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} v_{k_2}[n_1]e^{-2\pi ik_1n_1/N_1} \\
&= \hat{v}_{k_2}[k_1].
\end{aligned}$$

(c) Aufgrund der 2π-Periodizität der Funktionen f und p reicht es, die Stellen $x_k = \pi k/2$ für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ zu betrachten. Wir berechnen

$$f(x_k) = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ 1/2, & k = 1, \\ 1, & k = 2, \\ 1/2, & k = 3. \end{cases}$$

Das Auswerten von p an den Stellen x_k für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ ergibt:

$$\begin{aligned}
p(x_k) &= \sum_{n=0}^{3} (a_n \cos(n\pi k/2) + b_n \sin(n\pi k/2)) \\
&= \sum_{n=0}^{3} \left(\frac{a_n}{2}\left(e^{2\pi ikn/4} + e^{-2\pi ikn/4}\right) + \frac{b_n}{2i}\left(e^{2\pi ikn/4} - e^{-2\pi ikn/4}\right) \right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{3} a_ne^{2\pi ikn/4} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{3} a_ne^{-2\pi ikn/4} + \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{3} b_ne^{2\pi ikn/4} - \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{3} b_ne^{-2\pi ikn/4} \\
&= \frac{1}{2}\hat{a}^*[k] + \frac{1}{2}\hat{a}[k] + \frac{1}{2i}\hat{b}^*[k] - \frac{1}{2i}\hat{b}[k], \qquad (3)
\end{aligned}$$

wobei $(\hat{a}[k])_{0\leq k\leq 3}$ und $(\hat{b}[k])_{0\leq k\leq 3}$ die 4-Punkt DFTs von $(a_n)_{0\leq n\leq 3}$ und $(b_n)_{0\leq n\leq 3}$

bezeichnen. Des Weiteren haben wir im letzten der zu (3) führenden Schritte verwendet, dass $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \{0,1,2,3\}$. Es muss gemäss Angabe gelten

$$f(x_k) = p(x_k), \qquad k \in \{0,1,2,3\}. \tag{4}$$

Da die IDFT eine invertierbare lineare Abbildung ist, ist (4) äquivalent zu folgender Bedingung:

$$F_4^{-1} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{pmatrix} = F_4^{-1} \begin{pmatrix} p(x_0) \\ p(x_1) \\ p(x_2) \\ p(x_3) \end{pmatrix},$$

wobei F_4^{-1} die Inverse der 4-Punkt DFT Matrix F_4 bezeichnet. Die N-Punkt DFT Matrix ist wie folgt definiert:

$$F_N := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix},$$

wobei $\omega_N := e^{-2\pi i/N}$, für $N \in \mathbb{N}$. Somit erhalten wir

$$F_4^{-1} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ 0 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die inverse 4-Punkt DFT von $(p(x_k))_{0 \le k \le 3}$ mit Hilfe des Ausdrucks (3) und verwenden Formel 80 in der Formelsammlung sowie die Tatsache, dass $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, für $n \in \{0,1,2,3\}$. Damit erhalten wir folgenden Ausdruck für die inverse 4-Punkt DFT:

$$\frac{1}{2}a_{-n} + \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2i}b_{-n} - \frac{1}{2i}b_n, \qquad n \in \{0,1,2,3\},$$

wobei die Indizes modulo 4 zu verstehen sind. Es folgt

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \frac{1}{2}(a_1 + a_3) + \frac{1}{2i}(b_3 - b_1) \\ a_2 \\ \frac{1}{2}(a_1 + a_3) + \frac{1}{2i}(b_1 - b_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ 0 \\ -1/4 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Beachten Sie, dass die Lösung von (5) nach den Koeffizienten a_n, b_n, $n \in \{0,1,2,3\}$, nicht eindeutig ist. Beispielsweise können wir die Koeffizienten wie folgt wählen: $a_0 = 1/2$, $a_1 = a_3 = -1/4$, und $a_2, b_0, \ldots, b_3 = 0$. Mit dieser Lösung erhalten wir folgendes trigonometrisches Polynom:

$$p(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\cos(x) + \cos(3x)\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$