Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Professur für Mathematische Informationswissenschaften
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Lösung zur
Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
7. Februar 2024

Aufgabe 1

(a) i. Ein LTI-System ist ein linearer, stetiger, und zeitinvarianter Operator. Offensichtlich ist H_3 linear, da Differentiation eine lineare Operation ist, und auch stetig, dank dem Hinweis. Ein System $H : X \to Y$ ist zeitinvariant, wenn für alle $x \in X$ und jedes $\tau \in \mathbb{R}$ gilt

$$T_\tau H x = H T_\tau x,$$

mit dem Zeitverschiebungsoperator $(T_\tau x)(t) = x(t - \tau)$. Andererseits haben wir

$$\frac{d}{dt}(x(t-\tau)) = \frac{dx}{dt}(t-\tau), \ \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \implies H_3 T_\tau x = T_\tau H_3 x.$$

Damit folgt, dass H_3 auch zeitinvariant und damit ein LTI-System ist.

ii. Angesichts der Definition der Faltung schreiben wir

$$(H_1 x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t-\tau)\, d\tau = (x * g)(t),$$

wobei $g(t) = e^{-|t|}/2$. Es folgt, dass die Impulsantwort des LTI-Systems H_1 durch

$$h_1(t) = g(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}$$

gegeben ist. Aus Formel 26 in der Formelsammlung erhalten wir mit $a = 1$ nun

$$\widehat{h}_1(f) = \frac{1}{2} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2}.$$

Für $\widehat{h}_2(f)$ ergibt sich aus Formel 28 in der Formelsammlung

$$\widehat{h}_2(f) = \begin{cases} 1, & -f_g \le f \le f_g \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Letztlich folgt mit $(H_3 x)(t) = x'(t)$ unter Verwendung von Formel 14 in der

Formelsammlung, dass

$$\widehat{(H_3 x)}(f) = (2\pi i f)\widehat{x}(f).$$

iii. H ist als Kaskade dreier LTI-Systeme ebenfalls ein LTI-System. Insgesamt haben wir nach Anwendung der Fouriertransformation:

$$\widehat{h}(f) = \widehat{h}_1(f)\widehat{h}_2(f)(2\pi i f) = \begin{cases} \dfrac{2\pi i f}{1+4\pi^2 f^2}, & -f_g \leq f \leq f_g \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

iv. Da $x(t) = e^{2\pi i f_0 t},\ f_0 \in \mathbb{R}$, eine Eigenfunktion des LTI-Systems H mit zugehörigem Eigenwert $\widehat{h}(f_0)$ ist, folgt

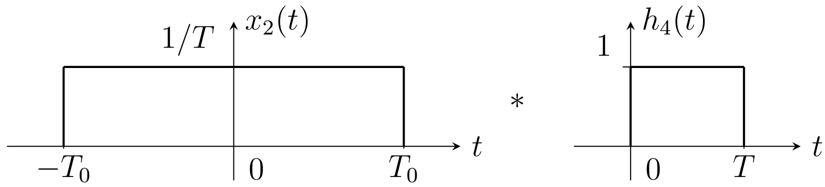
$$\begin{aligned}(Hx)(t) &= H\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{2\pi i k t/T}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \widehat{h}\left(\frac{k}{T}\right) e^{2\pi i k t/T} \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{k=-\lceil T f_g \rceil}^{k=\lfloor T f_g \rfloor} c_k\, \frac{2\pi i (k/T)}{1+4\pi^2 (k/T)^2}\, e^{2\pi i k t/T},\end{aligned}$$

wobei wir für $(*)$ die Antwort aus Teilaufgabe (iii) verwendet haben.

(b) Wir erkennen, dass die Faltung zweier Rechtecke ein Trapez ergibt und erhalten damit

$$x_2(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{T}, & -T_0 \leq t \leq T_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Durch graphische Faltung erkennt man, dass



das gesuchte Signal $y_2(t)$ ergibt.

(c) Bezeichnet man die Fouriertransformierte der Impulsantwort als $\widehat{h}_5(f)$, so gilt $\widehat{y}(f) = \widehat{h}_5(f)\widehat{x}(f)$, wobei $y = H_5 x$. Wir wenden die Fouriertransformation auf beide Seiten der Differentialgleichung an und erhalten

$$-(2\pi i f)^2\widehat{y}(f)+a^2\widehat{y}(f)=(4\pi^2f^2+a^2)\widehat{y}(f)=(4\pi^2f^2+a^2)\widehat{h}_5(f)\widehat{x}(f)=\widehat{x}(f).$$

Daraus resultiert

$$\widehat{h}_5(f)=\frac{1}{a^2+4\pi^2f^2}=\frac{1}{2a}\frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}.$$

Verwenden der Formel 26 in der Formelsammlung liefert nun

$$h_5(t)=\frac{1}{2a}e^{-a|t|}.$$

(d) i. Für $k=0$ erhalten wir

$$c_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,dt=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\frac{2A}{T}\,t\,dt=\frac{4A}{T^2}\frac{T^2}{8}=\frac{A}{2}.$$

Für $k\neq 0$ berechnen sich die Koeffizienten der Fourierreihe wie folgt

$$\begin{aligned}
c_k&=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,e^{-2\pi ikt/T}dt\\
&=\frac{1}{T}\left(-\int_{-T/2}^{0}\frac{2A}{T}\,t\,e^{-2\pi ikt/T}dt+\int_0^{T/2}\frac{2A}{T}\,t\,e^{-2\pi ikt/T}dt\right)\\
&=\frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2}\frac{2A}{T}\,t\,e^{2\pi ikt/T}dt+\int_0^{T/2}\frac{2A}{T}\,t\,e^{-2\pi ikt/T}dt\right)\\
&=\mathrm{Re}\left(\frac{4A}{T^2}\int_0^{T/2}t\,e^{2\pi ikt/T}dt\right),
\end{aligned}$$

wobei $\mathrm{Re}(z)$ den Realteil von $z\in\mathbb{C}$ bezeichnet. Damit erhalten wir mit der Substitution $\tau=\frac{2\pi}{T}t$,

$$\begin{aligned}
\frac{4A}{T^2}\int_0^{T/2}t\,e^{2\pi ikt/T}dt&=\frac{A}{\pi^2}\int_0^{\pi}\tau\,e^{ik\tau}d\tau\\
&\overset{(*)}{=}\frac{A}{\pi^2}\left.\frac{e^{ik\tau}(ik\tau-1)}{(ik)^2}\right|_{\tau=0}^{\tau=\pi}\\
&=\frac{A}{k^2\pi^2}\left(-1-(-1)^k(ik\pi-1)\right),
\end{aligned}$$

wobei wir für $(*)$ den Hinweis verwendet haben.

Für $k = 2m,\ m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0$, erhält man

$$\begin{aligned} c_k &= \text{Re}\left(\frac{A}{k^2\pi^2}\left(-1 - (ik\pi - 1)\right)\right) \\ &= \frac{A}{k^2\pi^2}\left(-1 - (-1)\right) = 0. \end{aligned}$$

Für $k = 2m - 1,\ m \in \mathbb{Z}$, gilt

$$\begin{aligned} c_k &= \text{Re}\left(\frac{A}{k^2\pi^2}\left(-1 + (ik\pi - 1)\right)\right) \\ &= \frac{A}{k^2\pi^2}\left(-1 + (-1)\right) \\ &= -\frac{2A}{k^2\pi^2}. \end{aligned}$$

ii. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \left(\frac{2A}{T}t\right)^2 dt \\ &= \frac{8A^2}{T^3}\frac{T^3}{24} \\ &= \frac{A^2}{3}. \end{aligned} \tag{1}$$

Aus der Parsevalschen Beziehung folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \\ &= |c_0|^2 + 2\sum_{m=1}^{\infty} |c_{2m-1}|^2 \\ &= \frac{A^2}{4} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4A^2}{(2m-1)^4\pi^4}; \end{aligned} \tag{2}$$

Kombination von (1) und (2) liefert letztlich

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{3} &= \frac{A^2}{4} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4A^2}{(2m-1)^4\pi^4} \\ \iff \frac{1}{3} - \frac{1}{4} &= \frac{8}{\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^4} \\ \iff \frac{\pi^4}{96} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^4}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) Die gesuchten Fourierkoeffizienten c_k ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2F}\int_{-F}^{F} \hat{y}(f)e^{-\pi i k f/F}\,\mathrm{d}f \\ &= \frac{1}{2F}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)e^{-\pi i k f/F}\,\mathrm{d}f \\ &= \frac{1}{2F}x\big(-\tfrac{k}{2F}\big), \end{aligned}$$

wobei wir $\hat{y}(f) = \hat{x}(f)$, für alle f mit $|f| \le F$, und $\hat{x}(f) = 0$, für alle f mit $|f| > F_0$, sowie $F \ge F_0$ verwendet haben.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)e^{2\pi i f t}\,\mathrm{d}f \\ &= \int_{-F_0}^{F_0} \hat{y}(f)e^{2\pi i f t}\,\mathrm{d}f && (3) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-F_0}^{F_0} e^{2\pi i f(t+k/(2F))}\,\mathrm{d}f && (4) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} \int_{-F_0}^{F_0} e^{2\pi i f(t-k/(2F))}\,\mathrm{d}f \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\big(\tfrac{k}{2F}\big)g_k(t), && (5) \end{aligned}$$

wobei wir in (3) $\hat{y}(f) = \hat{x}(f)$, für alle f mit $|f| \le F$, und $\hat{x}(f) = 0$, für alle f mit $|f| > F_0$, in (4) Formel 34 in der Formelsammlung und in (5) das Resultat aus Teilaufgabe (a) mit

$$\begin{aligned} g_k(t) &= \frac{1}{2F}\int_{-F_0}^{F_0} e^{2\pi i f(t-k/(2F))}\,\mathrm{d}f && (6) \\ &= \frac{F_0}{F}\frac{\sin(2\pi F_0(t-k/(2F)))}{2\pi F_0(t-k/(2F))} && (7) \end{aligned}$$

verwendet haben.

(c) Mit Hilfe von (6)–(7) folgt

$$g_k(t) = \frac{1}{2F}\int_{-F_0}^{F_0} \hat{g}_k(f)e^{2\pi i f t}\,\mathrm{d}f, \quad \text{für all } k \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

wobei

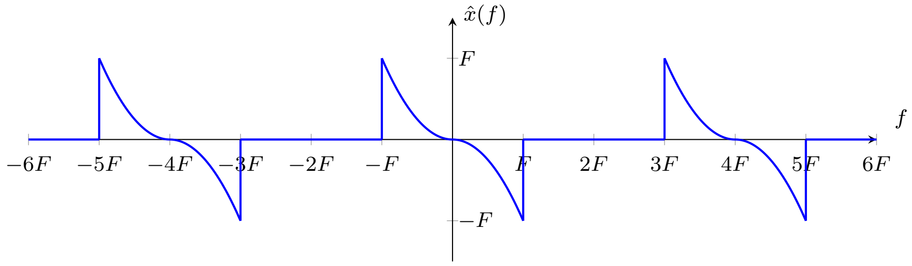
$$\hat{g}_k(f) = \begin{cases} e^{-\pi i f k/F}, & \text{für } |f| \le F_0 \\ 0, & \text{für } |f| > F_0 \end{cases}$$

gesetzt wurde. Folglich ist unter Verwendung der Plancherelschen Identität

$$\begin{aligned} \langle g_k, g_\ell \rangle &= \langle \hat{g}_k, \hat{g}_\ell \rangle \\ &= \int_{-F_0}^{F_0} e^{-\pi i f(k-\ell)/F} \, \mathrm{d}f \\ &= \begin{cases} 2F_0, & \text{für } k = \ell \\ 2\,\frac{\sin(\pi(k-\ell)F_0/F)}{\pi(k-\ell)/F}, & \text{für } k \neq \ell. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Funktionen $g_k(t)$ sind somit für $F = F_0$ orthogonal zueinander.

(d) Der Graph der Funktion $\hat{x}(f)$ sieht für $f \in [-6F, 6F]$ wie folgt aus:



(e) Es gilt

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{4F} \int_0^F \hat{x}(f) e^{-\pi i k f/(2F)} \, \mathrm{d}f + \frac{1}{4F} \int_{-F}^0 \hat{x}(f) e^{-\pi i k f/(2F)} \, \mathrm{d}f \\ &= -\frac{1}{4F^2} \int_0^F f^2 e^{-\pi i k f/(2F)} \, \mathrm{d}f + \frac{1}{4F^2} \int_0^F f^2 e^{\pi i k f/(2F)} \, \mathrm{d}f \\ &= \frac{i}{2F^2} \int_0^F f^2 \sin(\pi k f/(2F)) \, \mathrm{d}f \\ &= \frac{4iF}{(\pi k)^3} \int_0^{\pi k/2} s^2 \sin(s) \, \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{9}$$

Laut Hinweis gilt

$$\int_0^{\pi k/2} s^2 \sin(s) \, \mathrm{d}s = \left(2 - \left(\frac{\pi k}{2}\right)^2\right) \cos(\pi k/2) + \pi k \sin(\pi k/2) - 2, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Einsetzen von (10) in (9) ergibt schliesslich

$$c_k = iF\Big(\Big(\frac{8}{(\pi k)^3} - \frac{1}{\pi k}\Big)\cos(\pi k/2) + \frac{4}{(\pi k)^2}\sin(\pi k/2) - \frac{8}{(\pi k)^3}\Big). \tag{11}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\cos(\pi n) &= (-1)^n, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} &(12)\\
\cos(\pi n + \pi/2) &= 0, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} &(13)\\
\sin(\pi n) &= 0, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} &(14)\\
\sin(\pi n + \pi/2) &= (-1)^n, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}. &(15)
\end{aligned}$$

lässt sich (11) wie folgt vereinfachen:

$$c_{2n} = iF\Big((-1)^n\Big(\frac{1}{(n\pi)^3} - \frac{1}{2n\pi}\Big) - \frac{1}{(n\pi)^3}\Big), \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \tag{16}$$

und

$$c_{2n+1} = iF\Big(\frac{4(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} - \frac{8}{(2n+1)^3\pi^3}\Big), \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

Alternativer Lösungsweg: Das Resultat aus Teilaufgabe (a) besagt, angepasst für die Periodenlänge $4F$, dass

$$c_k = \frac{1}{4F}x\big(-\tfrac{k}{4F}\big), \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \tag{18}$$

gilt. Die Koeffizienten c_k können deshalb wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{4F}\int_{-2F}^{2F} \hat{x}(f)e^{-\pi i f k/(2F)}\,\mathrm{d}f &(19)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi i f)^2\,\hat{u}(f)e^{-\pi i f k/(2F)}\,\mathrm{d}f &(20)\\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(f)e^{2\pi i f t}\,\mathrm{d}f\Big)\Big|_{t=-k/(4F)} &(21)\\
&= \frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=-k/(4F)}, &(22)
\end{aligned}$$

wobei wir in (20)

$$\hat{u}(f) = \begin{cases} -1/(16\pi^2 F^2), & \text{für } -F \le f < 0 \\ 1/(16\pi^2 F^2), & \text{für } 0 \le f \le F \\ 0, & \text{für } |f| > F \end{cases}$$

gesetzt haben, in (21) Formel 14 in der Formelsammlung verwendet wurde, und in (22) $u(t)$ die inverse Fouriertransformierte von $\hat{u}(f)$ bezeichnet. Nun ist

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{16\pi^2 F^2}\Big(\int_0^F e^{2\pi i f t}\,\mathrm{d}f - \int_{-F}^0 e^{2\pi i f t}\,\mathrm{d}f\Big) && (23) \\ &= \frac{i}{16\pi^3 F^2 t}(1-\cos(2\pi F t)). && (24) \end{aligned}$$

Die Substitution $s = 2\pi F t$ in (23)–(24) ergibt nun

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=-k/4F} &= \frac{iF}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\Big(\frac{1-\cos(s)}{s}\Big)\Big|_{s=-\pi k/2} && (25) \\ &= \frac{iF}{2}\Big(\frac{2}{s^3} + \cos(s)\Big(\frac{1}{s} - \frac{2}{s^3}\Big) - \sin(s)\frac{2}{s^2}\Big)\Big|_{s=-\pi k/2} \\ &= iF\Big(\Big(\frac{8}{(\pi k)^3} - \frac{1}{\pi k}\Big)\cos(\pi k/2) + \frac{4}{(\pi k)^2}\sin(\pi k/2) - \frac{8}{(\pi k)^3}\Big). && (26) \end{aligned}$$

Einsetzen von (25)–(26) in (22) ergibt (11).

Aufgabe 3

(a) i. Damit die Impulsantwort $h[n]$ des Systems reellwertig ist, d.h., $h[n] = h^*[n]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, muss nach Gleichung 98 in der Formelsammlung $H(z) = H^*(z^*)$ gelten. Wir schreiben nun

$$H(z) = \frac{1}{\left(z + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right)\left(z + \left(\frac{1}{2} + ai\right)\right)}$$

und somit gilt

$$H^*(z^*) = \frac{1}{\left(z + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right)\left(z + \left(\frac{1}{2} - ai\right)\right)}.$$

Damit muss $a = -\frac{1}{2}$ sein.

ii. Mit $a = 0$ liegen die Pole des Systems bei $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ und $z_2 = -\frac{1}{2}$, d.h., $|z_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $|z_2| = \frac{1}{2}$. Damit das System BIBO stabil ist, muss der Einheitskreis innerhalb der ROC liegen, somit ist die ROC gegeben durch $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

iii. Wir bestimmen die Partialbruchzerlegung von

$$H(z) = \frac{1}{\left(z + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)}.$$

Der Grad des Zählers ist kleiner als der des Nenners. Daher ist die Partialbruchzerlegung von der folgenden Form:

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{A_1}{z + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)} + \frac{A_2}{z + \frac{1}{2}}, && \text{mit} \\
A_1 &= \left(z + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right) H(z)\bigg|_{z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i} = -\frac{2}{i} && \text{und} \\
A_2 &= \left(z + \frac{1}{2}\right) H(z)\bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{2}{i} && .
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$H(z) = \frac{2}{i} z^{-1} \left(\frac{z}{z + \frac{1}{2}} - \frac{z}{z + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)} \right).$$

Damit das System kausal ist, muss $h[n] = 0, \; \forall n < 0$, gelten und $h[n]$ somit rechtsseitig sein. Daher ist das Konvergenzgebiet von $H(z)$ gegeben durch $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Mit den Formeln 94, 95 und 108 in der Formelsammlung erhalten wir

$$
\begin{aligned}
h[n] &= \frac{2}{i}\left[\sigma[n-1]\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sigma[n-1]\left(-\frac{1+i}{2}\right)^{n-1}\right] \\
&= \frac{2\sigma[n-1]}{i}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1+i}{2}\right)^{n-1}\right].
\end{aligned}
$$

iv. Wir bemerken, dass $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]1^{-n} = H(1)$. Somit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] &= \frac{2}{(2+1+i)\left(1+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{4}{9+3i}.
\end{aligned}
$$

(b) Wir erkennen, dass das System aus der Parallelschaltung zweier Systeme H_1 und H_2 besteht, sodass sich für das Gesamtsystem $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$ ergibt.

Das obere System, H_1, folgt hierbei der Differenzengleichung

$$
(H_1x)[n] = x[n-1] - \frac{4}{5}(H_1x)[n-1].
$$

Unter Verwendung der Gleichungen 94 und 95 in der Formelsammlung ergibt sich somit

$$
H_1(z)X(z) = z^{-1}X(z) - \frac{4}{5}z^{-1}H_1(z)X(z)
$$

was zu

$$
H_1(z) = \frac{z^{-1}}{1+\frac{4}{5}z^{-1}},
$$

führt. Das untere System, H_2, folgt der Differenzengleichung

$$
(H_2x)[n] = x[n] + \frac{5}{6}(H_2x)[n-1],
$$

was

$$
H_2(z)X(z) = X(z) + \frac{5}{6}z^{-1}H_2(z)X(z)
$$

entspricht. Dies ergibt nun

$$
H_2(z) = \frac{1}{1-\frac{5}{6}z^{-1}}.
$$

Somit erhalten wir für das Gesamtsystem

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) = \frac{z^{-1}}{1 + \frac{4}{5}z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{5}{6}z^{-1}}.$$

(c) Wir berechnen

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right) + z^{-1}(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)} \\ &= \frac{1 + \frac{2}{3}z^{-1} + z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + \frac{2}{3}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}} \\ &= \frac{1 + \frac{5}{3}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}}. \end{aligned}$$

Aus der Eingangs-Ausgangsbeziehung $y[n] = (h * x)[n]$ dargestellt im z-Bereich folgt nun

$$Y(z) = X(z)H(z) = X(z)\frac{1 + \frac{5}{3}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}}$$

und damit

$$Y(z) + \frac{1}{6}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{3}z^{-2}Y(z) = X(z) + \frac{5}{3}z^{-1}X(z) - \frac{1}{2}z^{-2}X(z).$$

Unter Verwendung von Gleichung 95 in der Formelsammlung erhalten wir daraus

$$y[n] + \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{3}y[n-2] = x[n] + \frac{5}{3}x[n-1] - \frac{1}{2}x[n-2].$$

Dies schreiben wir nun gemäss

$$y[n] = x[n] + \frac{5}{3}x[n-1] - \frac{1}{2}x[n-2] - \frac{1}{6}y[n-1] + \frac{1}{3}y[n-2].$$

Koeffizientenvergleich liefert schliesslich

$$a_1 = \frac{5}{3} \qquad a_2 = -\frac{1}{2} \qquad b_1 = -\frac{1}{6} \qquad b_2 = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 4

(a) i. Es ergibt sich unmittelbar aus der Angabe

$$\sum_{n=0}^{N-1} (x[n-1] - 2x[n] + x[n+1]) = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi[n]. \tag{27}$$

Aufgrund der N-Periodizität des Signals x ist die linke Seite von (27) gleich Null, woraus folgt:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \varphi[n] = 0.$$

Jedoch gilt $\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n = 1$, wenn N ungerade ist. Somit kann für $\varphi[n] = (-1)^n$, $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, kein N-periodisches Signal x existieren, das (2) aus der Angabe erfüllt.

ii. Wir bezeichnen die N-Punkt DFT von φ als $\hat{\varphi}$ und schreiben $\varphi[n] = N\delta[n] - 1$, $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, wobei

$$\delta[n] := \begin{cases} 1, & \text{für } n = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch Anwendung der Gleichungen 87 und 90 aus der Formelsammlung bestimmen wir die N-Punkt DFT von φ als

$$\hat{\varphi}[k] = N - N\delta[k], \quad k \in \{0, \ldots, N-1\}. \tag{28}$$

Gemäss Angabe gilt

$$\varphi[n] = x[n-1] - 2x[n] + x[n+1], \quad n \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}[k] &= e^{-2\pi i k/N}\hat{x}[k] - 2\hat{x}[k] + e^{2\pi i k/N}\hat{x}[k] \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - 1\right)\hat{x}[k], \quad k \in \{0, \ldots, N-1\}, \end{aligned}$$

wobei Gleichung 77 aus der Formelsammlung verwendet wurde. Es folgt

$$\hat{x}[k] = \begin{cases} a, & \text{für } k = 0, \\ \frac{\hat{\varphi}[k]}{2\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - 1\right)}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad k \in \{0, \ldots, N-1\}, \tag{29}$$

wobei $a \in \mathbb{C}$ beliebig gewählt werden kann. Setzen wir nun (28) in (29) ein, erhalten wir

$$\hat{x}[k] = \begin{cases} a, & \text{für } k = 0, \\ \frac{N}{2\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)-1\right)}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad k \in \{0, \dots, N-1\}.$$

(b) Sei a ein komplexwertiges K-periodisches Signal. Wir definieren das N-periodische Signal u_a wie folgt:

$$u_a[n] := \begin{cases} a[k], & \text{falls } n = kL, \text{ für } k \in \{0, \dots, K-1\}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Die N-Punkt DFT von u_a ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{u}_a[m] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i m n/N} \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} a[k] e^{-2\pi i m k L/N} \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} a[k] e^{-2\pi i m k/K} \\ &= \hat{a}[m], \quad m \in \{0, \dots, N-1\}, \end{aligned} \tag{30}$$

wobei $\hat{a}$ die K-Punkt DFT von a bezeichnet.

Sei nun $a[k] = \cos^2(\pi k/K)$, $k \in \{0, \dots, K-1\}$. Wir schreiben

$$\begin{aligned} a[k] &= \left(\frac{1}{2}\left(e^{\pi i k/K} + e^{-\pi i k/K}\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2\pi i k/K} + 2 + e^{-2\pi i k/K}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{2\pi i k/K} + \frac{1}{4} e^{2\pi i k(K-1)/K}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir unter Verwendung von Gleichung 87 aus der Formelsammlung

$$\hat{a}[\ell] = \frac{K}{2}\delta[\ell] + \frac{K}{4}\delta[\ell - 1] + \frac{K}{4}\delta[\ell - (K-1)], \quad \ell \in \{0, \dots, K-1\},$$

wobei

$$\delta[\ell] := \begin{cases} 1, & \text{für } \ell = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch Anwendung von (30) ergibt sich

$$\hat{x}[m] = \begin{cases} \frac{K}{2}, & \text{falls } m = \ell K, \text{ für } \ell \in \{0, \dots, L-1\}, \\ \frac{K}{4}, & \text{falls } m = \ell K + 1 \text{ oder } m = (\ell+1)K - 1, \text{ für } \ell \in \{0, \dots, L-1\}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $m \in \{0, \dots, N-1\}$.

(c) i. Für $k \in \{0, \dots, N/2-1\}$ berechnen wir:

$$\begin{aligned} \hat{x}[2k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i (2k) n/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] e^{-2\pi i k n/(N/2)} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i k n/(N/2)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] e^{-2\pi i k n/(N/2)} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n+N/2] e^{-2\pi i k (n+N/2)/(N/2)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] e^{-2\pi i k n/(N/2)} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n+N/2] e^{-2\pi i k n/(N/2)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x[n] + x[n+N/2]\right) e^{-2\pi i k n/(N/2)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} u[n] e^{-2\pi i k n/(N/2)} \\ &= \hat{u}[k]. \end{aligned}$$

ii. Sei $\xi \in \{1, 3\}$. Für $k \in \{0, \dots, N/4-1\}$ gilt folgende Zerlegung

$$\begin{aligned} \hat{x}[4k+\xi] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i (4k+\xi) n/N} \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{N/4-1} x[n] e^{-2\pi i (4k+\xi) n/N}}_{=:A} + \underbrace{\sum_{n=N/4}^{N/2-1} x[n] e^{-2\pi i (4k+\xi) n/N}}_{=:B} \end{aligned}$$

$$+\underbrace{\sum_{n=N/2}^{3N/4-1} x[n]e^{-2\pi i(4k+\xi)n/N}}_{=:C} + \underbrace{\sum_{n=3N/4}^{N-1} x[n]e^{-2\pi i(4k+\xi)n/N}}_{=:D}. \tag{31}$$

Beachten Sie, dass A geschrieben werden kann als

$$A = \sum_{n=0}^{N/4-1} x[n]\omega_N^{\xi n} e^{-2\pi ikn/(N/4)}. \tag{32}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
B &= \sum_{n=N/4}^{N/2-1} x[n]e^{-2\pi i\xi n/N} e^{-2\pi ikn/(N/4)} \\
&= \sum_{n=0}^{N/4-1} x[n+N/4]e^{-2\pi i\xi n/N} e^{-\pi i\xi/2} e^{-2\pi ikn/(N/4)} \\
&= \sum_{n=0}^{N/4-1} x[n+N/4](-i)^{\xi}\omega_N^{\xi n} e^{-2\pi ikn/(N/4)} \\
&= -\sum_{n=0}^{N/4-1} x[n+N/4]i^{\xi}\omega_N^{\xi n} e^{-2\pi ikn/(N/4)},
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{n=N/2}^{3N/4-1} x[n]e^{-2\pi i\xi n/N} e^{-2\pi ikn/(N/4)} \\
&= \sum_{n=0}^{N/4-1} x[n+N/2]e^{-2\pi i\xi n/N} e^{-\pi i\xi} e^{-2\pi ikn/(N/4)} \\
&= -\sum_{n=0}^{N/4-1} x[n+N/2]\omega_N^{\xi n} e^{-2\pi ikn/(N/4)}
\end{aligned} \tag{34}$$

und

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{n=3N/4}^{N-1} x[n]e^{-2\pi i\xi n/N} e^{-2\pi ikn/(N/4)} \\
&= \sum_{n=0}^{N/4-1} x[n+3N/4]e^{-2\pi i\xi n/N} e^{-3\pi i\xi/2} e^{-2\pi ikn/(N/4)} \\
&= \sum_{n=0}^{N/4-1} x[n+3N/4]i^{\xi}\omega_N^{\xi n} e^{-2\pi ikn/(N/4)}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Setzen wir nun (32), (33), (34) und (35) in (31) ein, dann erhalten wir

$$\hat{x}[4k+\xi] = \sum_{n=0}^{N/4-1} \Big(x[n] - x[n+N/2] - i^{\xi}\big(x[n+N/4] \\ - x[n+3N/4]\big)\Big)\omega_N^{\xi n} e^{-2\pi i k n/(N/4)}.$$

Gemäss Angabe gilt

$$v[n] = (x[n] - x[n+N/2] - i\,(x[n+N/4] - x[n+3N/4]))\,\omega_N^{n},$$
$$w[n] = (x[n] - x[n+N/2] + i\,(x[n+N/4] - x[n+3N/4]))\,\omega_N^{3n},$$

für $n \in \{0, \ldots, N/4-1\}$. Dadurch ergibt sich

$$\hat{x}[4k+1] = \sum_{n=0}^{N/4-1} v[n] e^{-2\pi i k n/(N/4)},$$
$$\hat{x}[4k+3] = \sum_{n=0}^{N/4-1} w[n] e^{-2\pi i k n/(N/4)},$$

für $k \in \{0, \ldots, N/4-1\}$. Aus der Definition der $N/4$-Punkt DFT folgt nun, dass

$$\hat{x}[4k+1] = \hat{v}[k],$$
$$\hat{x}[4k+3] = \hat{w}[k],$$

für $k \in \{0, \ldots, N/4-1\}$.