ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik

Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Musterklausur 1 zu Signal- und Systemtheorie I
5. Januar 2013

Bitte beachten Sie:

- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung erlaubt sind das unbeschriebene, ausgedruckte Vorlesungsskriptum, die Transformationstabelle, sowie 10 Seiten (einseitig beschriebene) selbstverfasste Zusammenfassung. Die Benutzung von Rechnern jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Aufgabenteile, die mit einem ★ gekennzeichnet sind, können unabhängig von vorhergehenden Aufgabenteilen gelöst werden.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen Sie darauf hin, dass Studierende bei unehrlichem Handeln während der Prüfung den Strafnormen der Disziplinarordnung RSETHZ 361.1 der ETHZ unterstehen.

Vor der Klausur:

1. Dieses Angabenheft hat 13 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen in den dafür vorgesehenen Platz. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie leere Blätter.

Nach der Klausur:

5. Nummerieren Sie alle zusätzlichen Blätter. Tragen Sie die Gesamtanzahl der Blätter, die Sie abgeben möchten (inklusive der 13 Angabenblätter), auf dieser Seite unten ein und unterschreiben Sie. Alle Angabenblätter müssen abgegeben werden.

Nachname: .... Vorname: ....

Legi-Nr.: ....

Anzahl abgegebener Blätter **(inkl. 13 Angabenblätter)**: ....

Unterschrift: ....

1. **Aufgabe** (29 Punkte)

Die Bestimmung der Fouriertransformierten erfordert die Kenntnis des gesamten Verlaufs der zugrundeliegenden Zeitfunktion. Da dies in der Praxis unmöglich ist, wird die Zeitfunktion nur in einem Ausschnitt betrachtet. Die daraus resultierende Kurzzeitfouriertransformation (engl.: STFT short-time Fourier transform) zum Zeitsignal $x(t)$ mit der Fensterfunktion $h(t)$ ist definiert durch

$$\hat{x}_h(t, f) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(\tau - t)e^{-2\pi i f \tau} d\tau.$$

★ (a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für eine fest gewählte Fensterfunktion $h(t)$ und Frequenz f das System mit Eingangssignal $x(t)$ und Ausgangssgignal $\hat{x}_h(t, f)$ linear ist.

★ (b) (3 Punkte) Bestimmen Sie $h(t)$ so, dass $\hat{x}_h(t, f) = \hat{x}(f)$.

★ (c) (6 Punkte) Geben Sie $\hat{x}_h(t, f)$ als Funktion der Spektren $\hat{x}(f)$ und $\hat{h}(f)$ an.

(d) (7 Punkte) Gegeben sei nun das Zeitsignal

$$x(t) = e^{2\pi i f_0 t}, \qquad \text{wobei } f_0 = \frac{1}{T_0},$$

und die Fensterfunktion

$$h(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant \frac{T_0}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Geben Sie die zugehörige Kurzzeit-Fouriertransformierte $\hat{x}_h(t, f)$ an.

(e) (9 Punkte) Betrachten Sie nun das Eingangssignal $x(t) = e^{2\pi i f_1 t} + e^{2\pi i f_2 t}$. Als Fensterfunktion $h(t)$ wird die Rechtecksfunktion aus der vorhergehenden Teilaufgabe verwendet. Geben Sie die zugehörige Kurzzeit-Fouriertransformierte $\hat{x}_h(t, f)$ an.
Wir wollen nun das Auflösungsvermögen der STFT in Abhängigkeit der Breite T_0 des Fensters betrachten. Die beiden harmonischen Komponenten des Eingangssignals erzeugen im Frequenzbereich zwei sich überlagernde Spektren mit jeweils einem "Peak". Diese beiden Spektren seien auflösbar, wenn der "Peak" des einen Spektrums mindestens soweit von dem des anderen Spektrums entfernt ist, wie die erste Nullstelle nach dem "Peak" des anderen Spektrums.
Welche Breite des Fensters T_0 ist nötig, damit die beiden Signalkomponenten auflösbar sind?

2. **Aufgabe** (21 Punkte) Wir betrachten ein zeitdiskretes komplexwertiges Signal x mit Periode N, das heisst es gilt $x[n] = x[n + \ell N]$ für jedes $\ell \in \mathbb{Z}$. Die diskrete Fouriertransformierte (DFT) $\hat{x}$ von x ist gegeben durch

$$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn} \qquad \text{wobei} \quad \omega_N = e^{-2\pi i/N}. \tag{1}$$

Die Beziehung zwischen x und $\hat{x}$ lässt sich in Matrixschreibweise zusammenfassen als

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}[0] \\ \hat{x}[1] \\ \vdots \\ \hat{x}[N-1] \end{pmatrix} = \mathbf{F}_N \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix} = \mathbf{F}_N x,$$

wobei der Eintrag in der k-ten Zeile und ℓ-ten Spalte von $\mathbf{F}_N$ durch $\omega_N^{(k-1)(\ell-1)}$ gegeben ist, also

$$\mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \omega_N^{(k-1)(\ell-1)} & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2N-2} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}.$$

★ (a) (2 Punkte) Welchen Gesamtaufwand bzw. welche Komplexität erfordert die Implementierung der DFT für ein Signal mit Periode N unter Anwendung der schnellen Fouriertransformation? (Es genügt die Angabe der Komplexität ohne Begründung.)

★ (b) (7 Punkte) Es sei x ein zeitdiskretes Signal mit gerader Periode, das heisst N sei gerade, und $\hat{x}$ die DFT von x. Für den $N/2$-periodischen geraden bzw. ungeraden Anteil des Signals x, gegeben durch $x_g[n] = x[2n]$ bzw. $x_u[n] = x[2n+1]$ für $n = 0, \dots, N/2-1$, notieren wir die entsprechende DFT der Länge $N/2$ durch $\hat{x}_g$ bzw. $\hat{x}_u$. Zeigen Sie mithilfe von (1), dass

$$\begin{aligned} \hat{x}[k] &= \hat{x}_g[k] + \omega_N^k \hat{x}_u[k] \\ \hat{x}[k+N/2] &= \hat{x}_g[k] - \omega_N^k \hat{x}_u[k] \end{aligned} \tag{2}$$

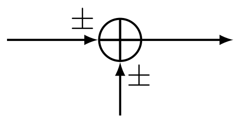
für $k = 0, \dots, N/2-1$.

In den übrigen Teilaufgaben betrachten wir nur noch die beiden Spezialfälle $N = 2$ und $N = 4$, wobei wir 2-periodische Signale mit y und 4-periodische Signale mit x notieren. Die Transformationsmatrizen der DFT ergeben sich hierbei zu

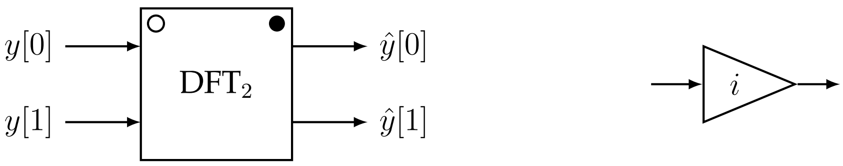
$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}.$$

★ (c) (3 Punkte) Es sei y ein zeitdiskretes 2-periodisches Signal und $\hat{y}$ seine DFT. Vervollständigen Sie das Diagramm

zu einem Blockschaltbild des DFT_2-Moduls unter ausschliesslicher Verwendung des Addierers/Subtrahierers:



★ (d) (9 Punkte) Es sei x ein zeitdiskretes 4-periodisches Signal und $\hat{x}$ seine DFT. Verwenden Sie die Beziehungen in (2) aus Teilaufgabe (2b) um eine DFT der Länge 4 in einem Blockschaltbild zu implementieren, welches nur die Komponenten

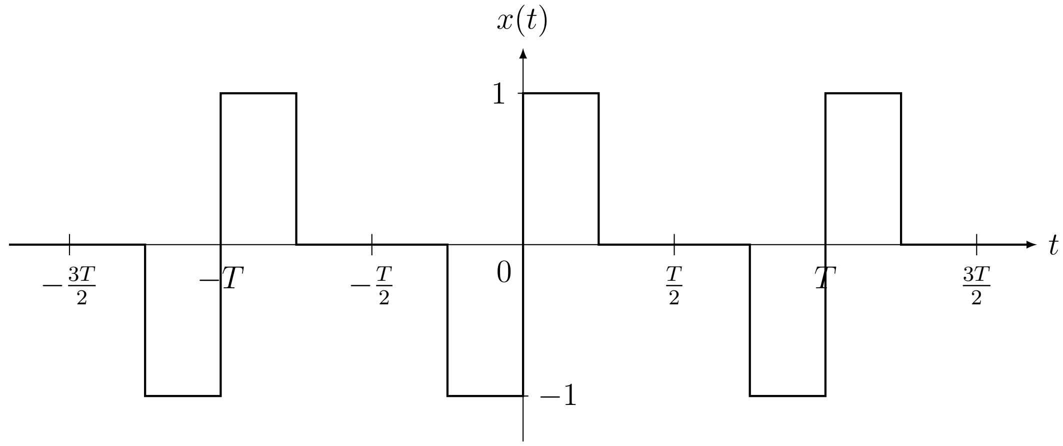


verwendet. Hierbei bezeichnet DFT_2 ein Modul, das auf ein zeitdiskretes 2-periodisches Signal y am Eingang das Ausgangssignal $\hat{y} = \mathbf{F}_2 y$ liefert, wobei der weisse bzw. schwarze Punkt anzeigt welche der beiden Eingangs- bzw. Ausgangskomponenten als die erste des Eingangs- bzw. des Ausgangsvektors aufgefasst wird. Geben Sie das Blockschaltbild an, indem Sie das untenstehende Diagramm vervollständigen, wobei Sie zunächst geschickt die Komponenten des Eingangssignals x und die des gesuchten Ausgangssignals $\hat{x}$ verteilen sollen.

Eingang: $x[0], \ldots, x[3]$ Ausgang: $\hat{x}[0], \ldots, \hat{x}[3]$

3. **Aufgabe** (37 Punkte)

Gegeben sei das periodische Signal $x(t)$, welches $x(t) = x(t+T)$ erfüllt, und im Folgenden für $-3T/2 \leqslant t \leqslant 3T/2$ gezeichnet ist:



Das Signal $x(t)$ kann als Fourierreihe dargestellt werden:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t/T}.$$

★ (a) (6 Punkte) Berechnen Sie die Koeffizienten c_k.

★ (b) (5 Punkte) Berechnen Sie

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Das Signal $x(t)$ liegt nun am Eingang des folgenden LTI-Systems an:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Die Impulsantwort $h(t)$ ist gegeben als

$$h(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant \frac{T}{4} \\ 0, & |t| > \frac{T}{4}. \end{cases}$$

★ (c) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass das Ausgangssignal $y(t)$ ebenfalls periodisch mit der Periode T ist, d.h., zeigen Sie, dass $y(t+T) = y(t)$ gilt.

★ (d) (9 Punkte) Zeichnen Sie das periodische Ausgangssignal $y(t)$ im Intervall $-3T/2 \leqslant t \leqslant 3T/2$. Achten Sie auf die Beschriftung der Achsen!

(e) (7 Punkte) Das Signal $y(t)$ kann als Fourierreihe dargestellt werden:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{2\pi i k t/T}.$$

Berechnen Sie die Koeffizienten d_k.

(f) (6 Punkte) Das Signal $y(t)$ wird nun abgetastet durch

$$y_a[n] = y\left(\frac{T}{4} + n\frac{T}{2}\right).$$

Berechnen Sie die zeitdiskrete Fouriertransformierte von $y_a[n]$.

4. **Aufgabe** (13 Punkte)

Eine Kamera filme das Rad eines Autos. Das Rad hat 8 Speichen und einen Umfang von $1\,\mathrm{m}$. Die Abtastfrequenz der Kamera (in Bilder pro Sekunde) betrage $32\,\mathrm{Hz}$. Beschleunigt das Auto, so scheint es als ob sich die Räder zunächst vorwärts drehen, dann stillstehen, sich rückwärts drehen, wieder stillstehen, dann wieder vorwärts drehen und so weiter.

★ (a) (6 Punkte) Bei welchen Geschwindigkeiten des Autos zeigt der Film stillstehende Räder?

★ (b) (7 Punkte) Das Auto bewege sich nun mit einer festen Geschwindigkeit. Was ist die maximal mögliche Geschwindigkeit v_{max}, so dass für alle Geschwindigkeiten v des Autos mit $|v| < v_{max}$ die Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung des Autos eindeutig aus dem Film bestimmt werden können?