ETH

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik

Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Lösung zur
Musterklausur 1 zu Signal- und Systemtheorie I
5. Januar 2013

1. **Aufgabe**

(a) Für zwei Signale x, y und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{STFT}(\alpha x + \beta y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x(\tau) + \beta y(\tau)) h(t-\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau + \beta \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) h(t-\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \alpha \hat{x}_h(t,f) + \beta \hat{y}_h(t,f).\end{aligned}$$

(b) Für $h(t) = 1$ ergibt sich $\hat{x}_h(t,f) = \hat{x}(f)$.

(c) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\hat{x}_h(t,f) &= \left(\mathcal{F}\left(x(\cdot)h(\cdot - t)\right)\right)(f) \\ &= \left(\hat{x} * \mathcal{F}h(\cdot - t)\right)(f),\end{aligned}$$

wobei $(\mathcal{F}h(\cdot - t))(f) = \hat{h}(f) e^{-2\pi i t f}$.

(d) Mit $\hat{x}(f) = \delta(f - f_0)$ und $\hat{h}(f) = \frac{\sin(\pi T_0 f)}{\pi f}$ ergibt sich zusammen mit dem vorhergehendem Aufgabenteil

$$\hat{x}_h(t,f) = \frac{\sin(\pi T_0 (f - f_0))}{\pi (f - f_0)} e^{-2\pi i t (f - f_0) t}.$$

(e) Mit Hilfe der vorhergehenden Teilaufgabe ergibt sich

$$\hat{x}_h(t,f) = \frac{\sin(\pi T_0 (f - f_1))}{\pi (f - f_1)} e^{-2\pi i t (f - f_1) t} + \frac{\sin(\pi T_0 (f - f_2))}{\pi (f - f_2)} e^{-2\pi i t (f - f_2) t}$$

Die beiden “Peaks” befinden sich bei $f = f_1$ und $f = f_2$. Die Nullstellen der Spektren liegen im Abstand von $\Delta f = \frac{1}{T_0}$ auf beiden Seiten der Maxima. Damit müssen die beiden “Peaks” mindestens einen Abstand von Δf aufweisen, um die Auflösbarkeit zu gewährleisten, d.h.,

$$\begin{aligned}&|f_1 - f_2| \geq \Delta f \\ \Leftrightarrow\ &T_0 \geq \frac{1}{|f_1 - f_2|}.\end{aligned}$$

2. **Aufgabe**

(a) Die Komplexität der schnellen Fourier-Transformation ist $\mathcal{O}(N \log N)$, siehe Vorlesungsskriptum.

(b) Zunächst erhalten wir aus der Definition der DFT

$$\begin{aligned}
\hat{x}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega_N^{kn} \\
&= \sum_{\ell=0}^{N/2-1} x[2\ell]\omega_N^{2k\ell} + \sum_{\ell=0}^{N/2-1} x[2\ell+1]\omega_N^{k(2\ell+1)} \\
&= \sum_{\ell=0}^{N/2-1} x_g[\ell]\omega_N^{2k\ell} + \omega_N^k \sum_{\ell=0}^{N/2-1} x_u[\ell]\omega_N^{2k\ell}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\hat{x}_g[k] = \sum_{\ell=0}^{N/2-1} x_g[\ell]\omega_{N/2}^{k\ell}, \quad \hat{x}_u[k] = \sum_{\ell=0}^{N/2-1} x_u[\ell]\omega_{N/2}^{k\ell}$$

und

$$\omega_N^2 = e^{-4\pi i/N} = e^{-2\pi i/(N/2)} = \omega_{N/2}$$

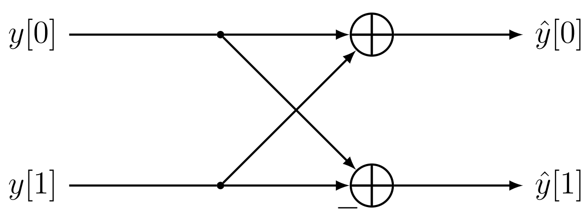
folgt für $k = 0, \ldots, N-1$, dass

$$\hat{x}[k] = \hat{x}_g[k] + \omega_N^k \hat{x}_u[k].$$

Da ausserdem $\omega_N^{k+N/2} = e^{-2\pi i(k+N/2)/N} = e^{-2\pi ik/N}e^{-\pi i} = -\omega_N^k$, erhalten wir unter Verwendung der $N/2$-Periodizität von $\hat{x}_g$ und $\hat{x}_u$

$$\begin{aligned}
\hat{x}[k+N/2] &= \hat{x}_g[k+N/2] + \omega_N^{k+N/2}\hat{x}_u[k+N/2] \\
&= \hat{x}_g[k] - \omega_N^k \hat{x}_u[k].
\end{aligned}$$

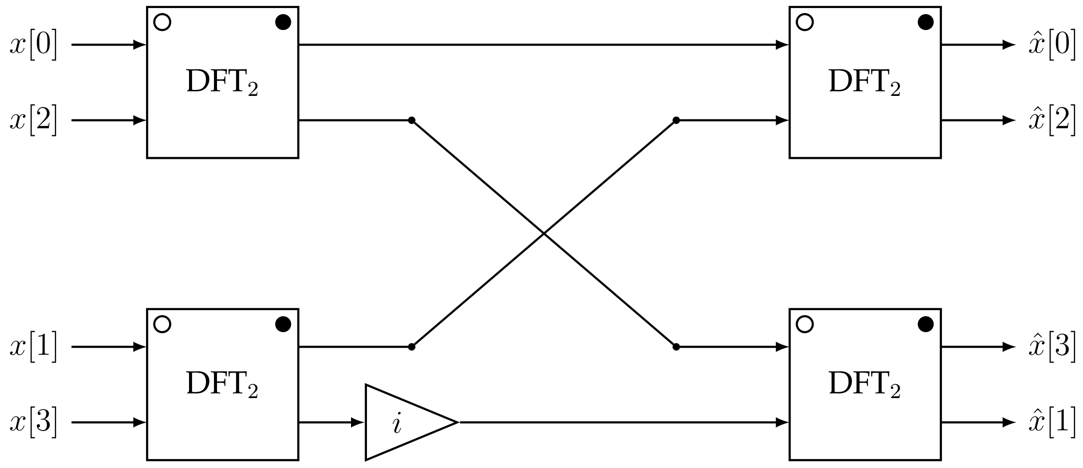
(c) Das folgende Diagramm realisiert ein DFT-Modul der Länge 2.



(d) Aus Teilaufgabe (2b) und $\omega_4 = -i$ erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\hat{x}[0] &= \hat{x}_g[0] + \omega_4^0 \hat{x}_u[0] = x[0] + x[2] + x[1] + x[3] \\
\hat{x}[1] &= \hat{x}_g[1] + \omega_4^1 \hat{x}_u[1] = x[0] - x[2] - i(x[1] - x[3]) \\
\hat{x}[2] &= \hat{x}_g[0] - \omega_4^0 \hat{x}_u[0] = x[0] + x[2] - x[1] - x[3] \\
\hat{x}[3] &= \hat{x}_g[1] - \omega_4^1 \hat{x}_u[1] = x[0] - x[2] + i(x[1] - x[3]).
\end{aligned}$$

Hieraus lässt sich das gesuchte System zum Beispiel folgendermassen realisieren:


$x[0]$
$x[2]$
$x[1]$
$x[3]$
DFT_2
DFT_2
i
DFT_2
DFT_2
$\hat{x}[0]$
$\hat{x}[2]$
$\hat{x}[3]$
$\hat{x}[1]$

3. **Aufgabe**

(a) Die Fourierreihenkoeffizienten sind gegeben durch

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-2\pi ikt/T}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-2\pi ikt/T}dt \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0}\left(-e^{-2\pi ikt/T}\right)dt + \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-2\pi ikt/T}dt\right).
\end{aligned}
$$

Die Fälle $k = 0$ und $k \neq 0$ müssen getrennt betrachtet werden. Für $k = 0$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{0}(-1)dt + \int_0^{\frac{T}{4}} dt\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Für $k \neq 0$ erhält man hingegen

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T}\left(\left[\frac{T}{2\pi ik}e^{-2\pi ikt/T}\right]_{-\frac{T}{4}}^{0} + \left[-\frac{T}{2\pi ik}e^{-2\pi ikt/T}\right]_0^{\frac{T}{4}}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi ik}\left(1 - e^{\pi ik/2} - e^{-\pi ik/2} + 1\right) \\
&= \frac{1}{\pi ik}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

(b) Mit Hilfe der Parsevalschen Beziehung erhält man

$$
\begin{aligned}
E &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} 1^2 dt \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

(c) Mittels Faltung des Eingangssignals mit der Impulsantwort des LTI-Systems erhält man

$$
\begin{aligned}
y(t) &= (x * h)(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} x(t-\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

und

$$\begin{aligned}
y(t+T) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+T-\tau)h(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} x(t-\tau)d\tau
\end{aligned}$$

wobei $x(t+T-\tau) = x(t-\tau)$ verwendet wurde. Somit gilt also $y(t) = y(t+T)$. Alternativ lässt sich verwenden, dass die Exponentialfunktionen $e^{2\pi ikt/T}$ Eigenfunktionen von LTI-Systemen mit zugehörigem Eigenwert $\hat{h}(k/T)$ sind, wobei $\hat{h}(f)$ der Frequenzgang des LTI-Systems ist. Daher ist die Systemantwort auf das Eingangssignal

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikt/T}$$

gegeben als

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \hat{h}(k/T) e^{2\pi ikt/T}.$$

Hieraus ist sofort ersichtlich, dass das Ausgangssignal $y(t)$ wieder periodisch mit der Grundperiode T ist.

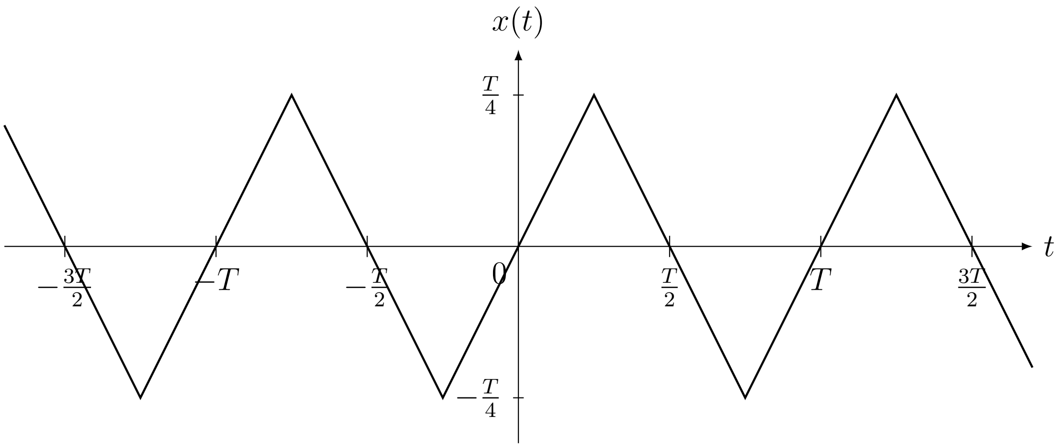
(d) Da $y(t+T) = y(t)$ gilt, genügt es, $y(t)$ auf einem Intervall der Länge T zu berechnen und dann periodisch fortzusetzen. Im Folgenden wird

$$\begin{aligned}
y(t) &= (x * h)(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

im Intervall $0 \leq t \leq T$ berechnet. Am einfachsten lässt sich dies mittels grafischer Faltung lösen.

- Für $t = 0$ ergibt sich $y(0) = 0$.
- Im Intervall $0 \leq t \leq T/4$ nimmt der Wert von $y(t)$ linear zu. Für $t = T/4$ ergibt sich $y(T/4) = T/4$.
- Im Intervall $T/4 \leq t \leq 3T/4$ nimmt der Wert von $y(t)$ linear ab. Für $t = 3T/4$ ergibt sich $y(3T/4) = -T/4$.
- Schliesslich nimmt der Wert von $y(t)$ im Intervall $3T/4 \leq t \leq T$ wieder linear zu. Für $t = T$ ergibt sich $y(T) = 0$.

Der Verlauf des Ausgangssignals $y(t)$ im Intervall $-3T/2 \leq t \leq 3T/2$ ist im folgenden Diagramm dargestellt:



(e) Wie im alternativen Lösungsweg zur Aufgabe (3c) bereits gezeigt, lässt sich das Ausgangssignal $y(t)$ als Fourierreihe wie folgt schreiben:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \hat{h}(k/T) e^{2\pi i k t/T}.$$

Hieraus kann man die Fourierreihenkoeffizienten von $y(t)$ sofort als

$$d_k = c_k \hat{h}(k/T)$$

ablesen. Im vorliegenden Fall gilt

$$\hat{h}(f) = \frac{\sin(\pi T f/2)}{\pi f}.$$

Um d_k zu bestimmen, betrachtet man die Fälle $k = 0$ und $k \neq 0$ wieder getrennt. Für $k = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} d_0 &= c_0 \hat{h}(0) \\ &= c_0 \frac{T}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für $k \neq 0$ erhält man

$$\begin{aligned} d_k &= c_k T \frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k} \\ &= \frac{T}{i(\pi k)^2}(1 - \cos(\pi k/2)) \sin(\pi k/2)\,. \end{aligned}$$

(f) Aus dem Schaubild von Aufgabenteil (3d) ist ersichtlich, dass

$$y_a[n] = y\left(\frac{T}{4} + n\frac{T}{2}\right) = (-1)^n \frac{T}{4}.$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$y_a[n] = \frac{T}{4} \cos(\pi n),$$

und der Formelsammlung erhalten wir

$$\hat{y}_a(\theta) = \frac{T}{8} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta + \frac{1}{2} - k\right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - \frac{1}{2} - k\right) \right).$$

4. **Aufgabe**

(a) Sei f die Frequenz mit der die Speichen auf "12-Uhr" vorbeikommen, f_a die Abtastfrequenz der Kamera und U der Umfang des Rades. Das Rad scheint auf dem Film zu stehen, genau dann, wenn f ein ganzzahliges Vielfaches der Abtastfrequenz f_a ist. Da das Rad 8 Speichen hat, gilt für die Umlauffrequenz des Rades $f_{Rad} = \frac{1}{8}f$. Damit sind die gesuchten Geschwindigkeiten des Autos

$$v_z = f_{Rad} \cdot U = \frac{1}{8} f \cdot U = \frac{z}{8} f_a \cdot U = 4z \,\mathrm{m/s}$$

für $z \in \mathbb{Z}$.

(b) Seien f, f_{Rad} und f_a wie zuvor definiert. Wie schon im ersten Aufgabenteil ergibt sich die Geschwindigkeit des Autos direkt aus der Frequenz f. Die Frequenz f kann eindeutig aus dem Film bestimmt werden, wenn die Bedingung des Abtasttheorems erfüllt ist, d.h., wenn gilt $|f| < f_a/2$. Damit erhalten wir für die Geschwindigkeit

$$|v| < 2\,\mathrm{m/s}. \tag{1}$$

Für den Fall $|v| = 2\,\mathrm{m/s}$ können wir nicht entscheiden, ob $v = 2\,\mathrm{m/s}$ oder $v = -2\,\mathrm{m/s}$. Denn aus einer analogen Überlegung wie im ersten Aufgabenteil ergibt sich, dass sich anhand des Filmes eine Geschwindigkeit nicht von einer um Vielfache von $4\,\mathrm{m/s}$ schnelleren bzw. langsameren Geschwindigkeit unterscheiden lässt. Also ist es in diesem Fall (und auch für noch grössere Geschwindigkeiten) nicht möglich die Frequenz f und damit die Geschwindigkeit und Fahrtrichtung eindeutig zu bestimmen. In diesem Sinne ist $2\,\mathrm{m/s}$ das Supremum der Geschwindigkeiten, für die die Bestimmung möglich ist.

Etwas intuitiver kann dies auch folgendermassen verstanden werden: Wir können die Speichen auf den verschiedenen Bildern voneinander unterscheiden, falls sich das Rad von einem Bild zum nächsten um weniger als $\pi/8$ weitergedreht hat. In der Drehfrequenz des Rades ausgedrückt bedeutet dies, dass $|f_{Rad}| = \frac{1}{8}|f| < \frac{1}{16} f_a$ und hieraus ergibt sich das gleiche Ergebnis wie zuvor.