ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Kommunikationstechnik

Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Musterklausur 2 zu Signal- und Systemtheorie I
5. Januar 2013

Bitte beachten Sie:
- Prüfungsdauer: 180 Minuten
- Erreichbare Punkte: 100
- Als Hilfsmittel während der Prüfung erlaubt sind das unbeschriebene, ausgedruckte Vorlesungsskriptum, die Transformationstabelle, sowie 10 Seiten (einseitig beschriebene) selbstverfasste Zusammenfassung. Die Benutzung von Rechnern jeglicher Art ist nicht gestattet.
- Bei jeder Lösung muss der Lösungsweg klar nachvollziehbar sein. Unleserliche oder unklare Darstellung der Ergebnisse führt zu Punkteabzug.
- Aufgabenteile, die mit einem ★ gekennzeichnet sind, können unabhängig von vorhergehenden Aufgabenteilen gelöst werden.
- Schreiben Sie auf keinen Fall mit roter oder grüner Farbe. Sie dürfen Bleistifte verwenden.
- Wir weisen Sie darauf hin, dass Studierende bei unehrlichem Handeln während der Prüfung den Strafnormen der Disziplinarordnung RSETHZ 361.1 der ETHZ unterstehen.

Vor der Klausur:
1. Dieses Angabenheft hat 15 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
2. Tragen Sie in die Felder unten auf dieser Seite Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer ein.
3. Legen Sie einen Ausweis zur Personenkontrolle bereit.

Während der Klausur:

4. Schreiben Sie die Lösungen in den dafür vorgesehenen Platz. Sollten Sie mehr Papier benötigen, erhalten Sie leere Blätter.

Nach der Klausur:

5. Nummerieren Sie alle zusätzlichen Blätter. Tragen Sie die Gesamtanzahl der Blätter, die Sie abgeben möchten (inklusive der 15 Angabenblätter), auf dieser Seite unten ein und unterschreiben Sie. Alle Angabenblätter müssen abgegeben werden.

Nachname: .... Vorname: ....

Legi-Nr.: ....

Anzahl abgegebener Blätter **(inkl. 15 Angabenblätter)**: ....

Unterschrift: ....

1. **Aufgabe** (29 Punkte) Betrachten Sie zunächst das System

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\mathfrak{Re}\{\cdot\}} \longrightarrow y(t)$$

welches für ein zeitkontinuierliches, komplexwertiges Eingangssignal $x(t)$ das Ausgangssignal $y(t) = \mathfrak{Re}\{x(t)\}$ liefert.

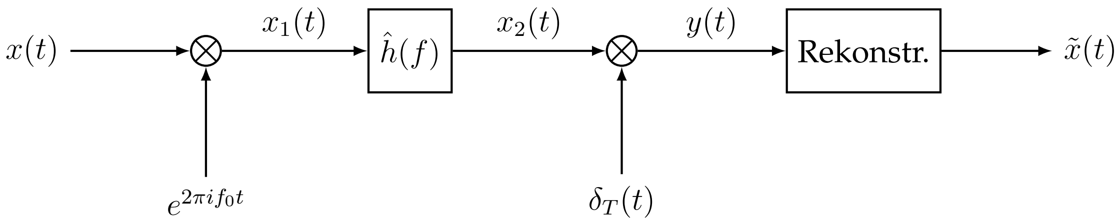
★ (a) (2 Punkte) Ist das System linear?

★ (b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für jedes Eingangssignal, dessen Spektrum reellwertig ist, das Ausgangssignal $y(t)$ ein gerades Spektrum hat, das heisst, dass für alle $f \in \mathbb{R}$

$$\hat{y}(f) = \hat{y}(-f),$$

wobei $\hat{y}(f)$ die Fouriertransformierte von $y(t)$ ist.

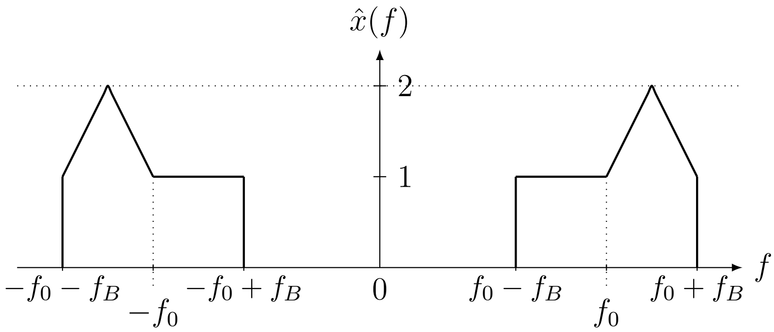
Für die restlichen Teilaufgaben untersuchen wir das folgende System:



Hierbei ist das LTI-System, das auf das Eingangssignal $x_1(t)$ mit dem Ausgangssignal $x_2(t)$ antwortet, durch den Frequenzgang

$$\hat{h}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_B \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Für die Konstanten f_0 und f_B gilt $0 < f_B < f_0$. Ferner ist $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ ein Impulskamm mit Periode T. Das Rekonstruktionsmodul ist zunächst nicht näher spezifiziert. Wir betrachten ein spezielles Eingangssignal $x(t)$, dessen Fouriertransformierte $\hat{x}(f)$ aus dem folgenden Schaubild abgelesen werden kann:



★ (c) (8 Punkte) Berechnen Sie $x_2(t)$.

★ (d) (6 Punkte) Skizzieren Sie für $T = 1/(4 f_B)$ die Fourier-Transformierte $\hat{y}(f)$ von $y(t)$ im Bereich $-6 f_B \leqslant f \leqslant 6 f_B$. *Achten Sie auf die Beschriftung der Achsen!*

(e) (9 Punkte) Für T wie in Teilaufgabe (d), realisieren Sie das Rekonstruktionsmodul, indem Sie ein System entwerfen, welches aus dem Eingangssignal $y(t)$ das ursprüngliche Signal $x(t)$ als Ausgangssignal rekonstruiert.

2. **Aufgabe** (13 Punkte)

★ (a) (5 Punkte) Gegeben sei ein zeitkontinuierliches, integrierbares Signal $w(t)$, das rein imaginär und ungerade (d.h. $w(-t) = -w(t)$) ist. Zeigen Sie über die Definition der Fouriertransformation, dass die Fouriertransformierte $\hat{w}(f)$ des Signals $w(t)$ rein reell und ungerade ist.

Gegeben sei nun das Signal $y(t) = \operatorname{sgn}(\sin(2\pi t/T_0))$ wobei die Signumfunktion als

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

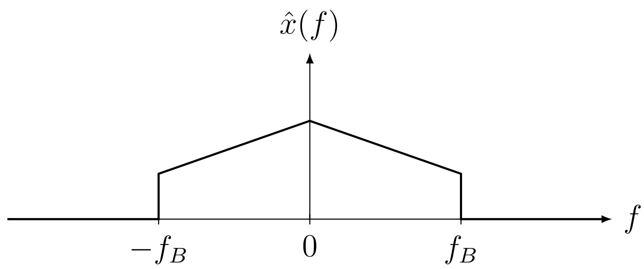
definiert ist. Das Signal $y(t)$ kann als Fourierreihe dargestellt werden:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t/T_0}.$$

★ (b) (8 Punkte) Bestimmen Sie die Fourierreihenkoeffizienten c_k des Signals $y(t)$.

3. **Aufgabe** (28 Punkte)

Bei der Analog-Digitalwandlung (A/D-Wandlung) eines tiefpassbegrenzten Signals $x(t)$ werden die Abtastwerte durch eine fehlerhafte Hardware gestört. In diesem Beispiel sollen Sie Verfahren zur Entstörung der Abtastwerte untersuchen. Wir betrachten ein Signal $x(t)$ dessen Fouriertransformierte $\hat{x}(f)$ aus dem Folgenden Schaubild entnommen werden kann (über die Amplitude des Spektrums ist nichts weiter bekannt):



★ (a) (5 Punkte) Das Signal $x(t)$ wird zu den Zeitpunkten nT_s abgetastet. Skizzieren Sie das Spektrum des abgetasteten Signals $x_d[n] = x(nT_s)$ für den Fall vierfacher Überabtastung, also für $\frac{1}{T_s} = 4f_{\text{Nyquist}} = 8f_B$.

(b) (9 Punkte) Wir nehmen weiterhin an, dass das Signal $x(t)$ vierfach überabgetastet wird. Wegen eines fehlerhaften A/D-Wandlers ist der Abtastwert an der Stelle $n = 0$ mit einem Fehler behaftet. Der A/D-Wandler liefert also das Signal

$$y[n] = x_d[n] + r[n]$$

wobei das Störsignal gegeben ist durch $r[n] = \alpha\delta[n]$ mit unbekanntem $\alpha \in \mathbb{C}$. Nun soll das fehlerhafte Signal $y[n]$ entstört werden. Dazu soll zunächst α bestimmt werden. Eine Messung des Spektrums

$$\hat{y}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] e^{-2\pi i \theta n}$$

ergibt $\hat{y}(1/2) = 2$. Bestimmen Sie daraus α und geben Sie eine Methode zur Entstörung des Signals $y[n]$ an, d.h., erklären Sie die Rückgewinnung von $x_d[n]$ aus $y[n]$. Erläutern Sie Ihre Methode und begründen Sie, warum dieses Verfahren nur bei Überabtastung funktioniert.

(c) (6 Punkte) Wiederholen Sie Teilaufgabe (b) für $r[n] = \alpha\delta[n] + \beta\delta[n-2]$. Nehmen Sie dazu an, dass eine Messung des Spektrums von $y[n]$ folgende Werte liefert:

$$\hat{y}(1/4) = 1$$
$$\hat{y}(1/2) = 3$$

Bestimmen Sie daraus die Parameter α und β und geben Sie eine Methode zur Entstörung des Signals $y[n]$ an.

(d) (8 Punkte) Versuchen Sie nun eine Methode zu finden, die eine Entstörung des Signals $y[n]$ erlaubt, wobei die Störung von der Form

$$r[n] = \sum_{\ell=0}^{L-1} \alpha_\ell \delta[n-\ell]$$

ist. Schreiben Sie das bei dem Verfahren auftretende Gleichungssystem in Matrix-/Vektornotation. Wie viele Abtastwerte des Spektrums von $y[n]$ benötigen Sie, um alle Koeffizienten α_ℓ, $\ell = 0, \ldots, L-1$, eindeutig bestimmen zu können? Worauf müssen Sie bei der Wahl der Abtastpunkte von $\hat{y}(\theta)$ achten?

4. **Aufgabe** (30 Punkte)

Ein LTI-System mit dem Eingangssignal $x(t)$ und dem zugehörigen Ausgangssignal $(Hx)(t) = y(t)$ sei gegeben durch

$$y(t) + T\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} x(\tau)d\tau, \quad T > 0$$

★ (a) (6 Punkte) Wie lautet die Übertragungsfunktion $\hat{h}(f)$ des obigen Systems? [Hinweis: Versuchen Sie, das Integral als eine Faltung darzustellen.]

(b) (7 Punkte) Geben Sie die Impulsantwort $h(t)$ des obigen Systems an.

(c) (6 Punkte) Begründen Sie, warum H kein kausales System beschreibt. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\hat{h}_2(f)$ eines *kausalen* LTI-Systems H_2, dessen Betragsfrequenzgang gleich dem von $\hat{h}(f)$ ist, d.h.

$$|\hat{h}_2(f)| = |\hat{h}(f)| \quad \forall f \in \mathbb{R}.$$

(d) (7 Punkte) Bestimmen Sie das Ausgangssignal $(H_2 x)(t)$ für das kausale System H_2 bei Anregung mit dem Eingangssignal

$$x(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right).$$

(e) (4 Punkte) Bestimmen Sie nun das Ausgangssignal $(Hx)(t)$ für das ursprüngliche System H bei Anregung mit $x(t)$ aus Teilaufgabe (d). Können Sie einen einfachen Zusammenhang zwischen $(H_2x)(t)$ und $(Hx)(t)$ angeben?