Lösung zur
Musterklausur 2 zu Signal- und Systemtheorie I
5. Januar 2013

1. **Aufgabe**

(a) Das System ist nicht linear, da wir zum Beispiel für ein reelles Signal $x(t)$, das nicht konstant gleich 0 ist, erhalten, dass

$$y(t) = \mathfrak{Re}\{x(t)\} = x(t),$$

jedoch ergibt sich für $\alpha = i$, dass

$$\mathfrak{Re}\{ix(t)\} = 0 \neq ix(t).$$

(b) Aus der Tabelle zur Fourier-Transformation erhalten wir

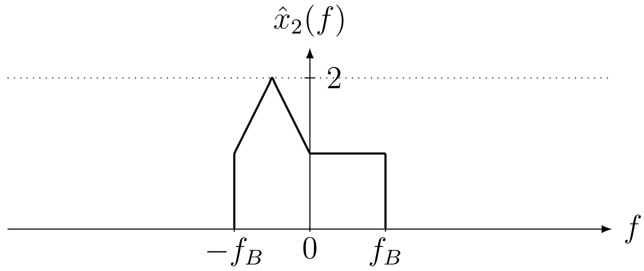
$$\hat{y}(f) = \frac{1}{2}(\hat{x}(f) + \hat{x}^*(-f)).$$

Da $\hat{x}(f)$ reellwertig ist, haben wir $\hat{x}^*(-f) = \hat{x}(-f)$ und damit folgt

$$\hat{y}(f) = \hat{y}(-f),$$

für alle $f \in \mathbb{R}$.

(c) Durch die Multiplikation mit $e^{2\pi i f_0 t}$ wird das Spektrum von $x(t)$ um f_0 nach rechts verschoben. Nach dem Durchlaufen des Tiefpassfilters $\hat{h}(f)$ erhalten wir das folgende Spektrum für $x_2(t)$:



Dieses Spektrum kann in eine Summe aus einer Rechtecks- und einer Dreiecksfunktion zerlegt werden. Hierzu definieren wir die folgenden Hilfsfunktionen im Frequenzbereich:

$$\hat{r}(f) = \begin{cases} 1, & |f| < f_B \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\hat{d}(f) = \begin{cases} 1 - \frac{2|f|}{f_B}, & |f| < \frac{1}{2} f_B \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ergibt sich die Zerlegung $\hat{x}_2(f) = \hat{r}(f) + \hat{d}(f + f_B/2)$. Unter Verwendung der Tabelle erhalten wir für die Fourier-Rücktransformierten von $\hat{r}(f)$ und $\hat{d}(f)$:

$$r(t) = \frac{\sin(2\pi f_B t)}{\pi t}$$
$$d(t) = \frac{2\sin^2(\pi f_B t/2)}{\pi^2 t^2 f_B}.$$

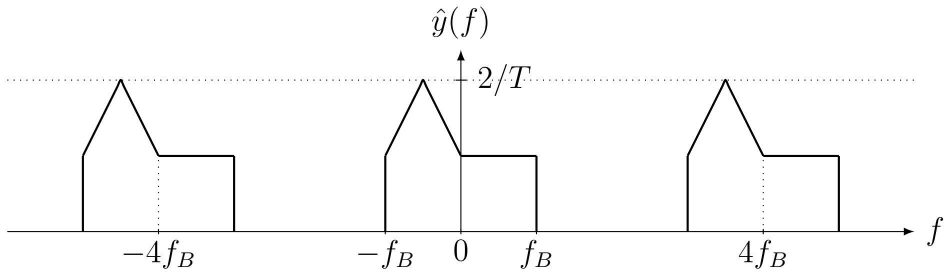
Schliesslich verwenden wir die Verschiebungseigenschaft der Fourier-Rücktransformation und bekommen

$$x_2(t) = \frac{\sin(2\pi f_B t)}{\pi t} + e^{-2\pi i f_B t/2} \frac{2\sin^2(\pi f_B t/2)}{\pi^2 t^2 f_B}.$$

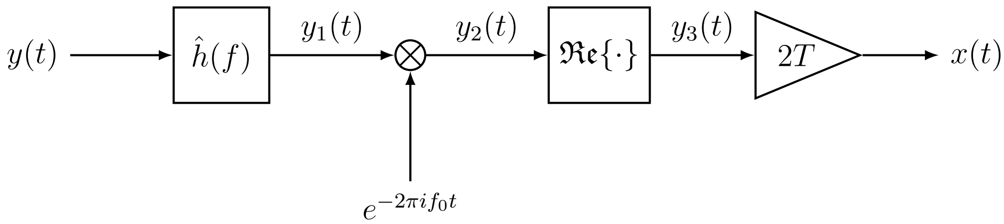
(d) Für $T = 1/(4f_B)$ erhalten wir für das Spektrum $\hat{y}(f)$ von $y(t)$:

$$\hat{y}(f) = 4f_B \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}_2(f - 4f_B k)\,.$$

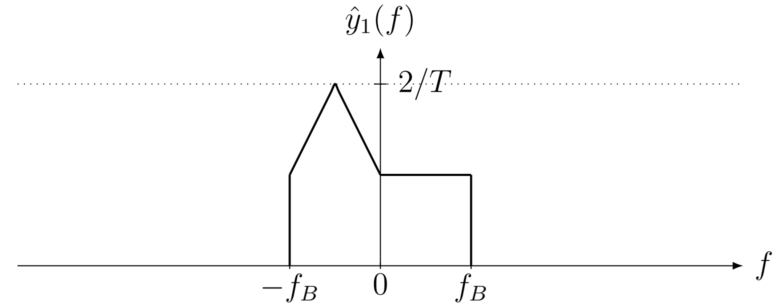
Damit ergibt sich das folgende Schaubild:

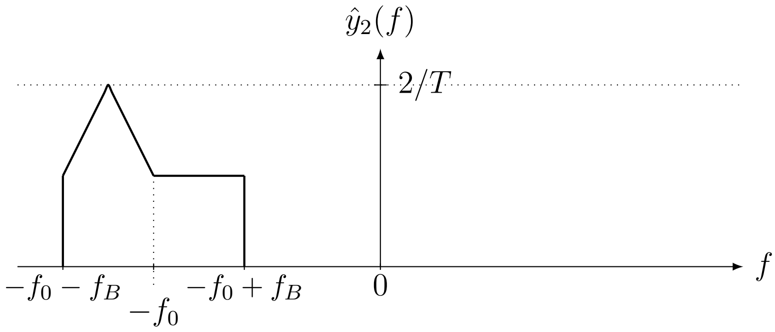


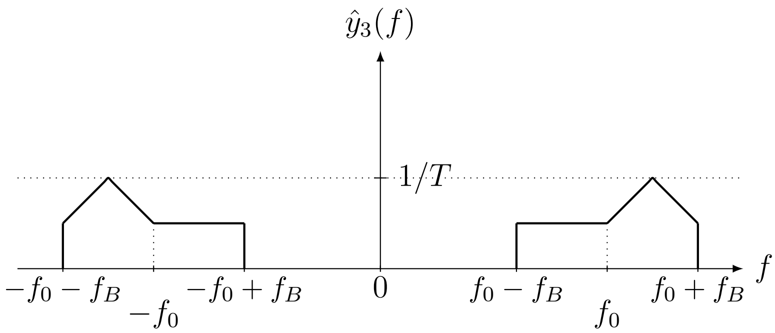
(e) Das Rekonstruktionsmodul lässt sich folgendermassen realisieren:



Hierbei ist $\hat{h}(f)$ der Frequenzgang aus der Aufgabenstellung. Um zu erkennen wie die schrittweise Rekonstruktion verläuft, ist es hilfreich sich die Spektra $\hat{y}_1(f)$, $\hat{y}_2(f)$ und $\hat{y}_3(f)$ der Zwischensignale $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$, respektive, zu veranschaulichen:


$\hat{y}_1(f)$
$2/T$
f
$-f_B$
0
f_B


$\hat{y}_2(f)$
$2/T$
f
$-f_0 - f_B$
$-f_0 + f_B$
0
$-f_0$


$\hat{y}_3(f)$
$1/T$
f
$-f_0 - f_B$
$-f_0 + f_B$
0
$f_0 - f_B$
$f_0 + f_B$
$-f_0$
f_0

2. **Aufgabe**

(a) Die Fouriertransformierte $\hat{w}(f)$ des Signals $w(t)$ ist per Definition gegeben als

$$\begin{aligned}\hat{w}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{-2\pi i f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w(t)(\cos(2\pi f t) - i\sin(2\pi f t))\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\cos(2\pi f t) dt - i\int_{-\infty}^{\infty} w(t)\sin(2\pi f t) dt.\end{aligned}$$

Da $w(t)$ eine ungerade und $\cos(2\pi f t)$ eine gerade Funktion ist, folgt, dass die Funktion $w(t)\cos(\omega t)$ ungerade ist. Daher gilt $\int_{-\infty}^{\infty} w(t)\cos(2\pi t)dt = 0$. Da $w(t)$ und $\sin(2\pi f t)$ beides ungerade Funktion sind, ist das Produkt $w(t)\sin(2\pi f t)$ eine gerade Funktion, und man erhält

$$\hat{w}(f) = -2i\int_{0}^{\infty} w(t)\sin(2\pi f t)dt. \tag{1}$$

Da $\sin(2\pi f t)$ eine ungerade Funktion ist, folgt nun aus (1), dass $\hat{w}(f)$ ungerade ist. Da $w(t)$ rein imaginär ist, folgt ausserdem aus (1), dass $\hat{w}(f)$ rein reell ist.

(b) Wir definieren zunächst das Hilfssignal

$$q(t) = 1 + y(t)$$

und bestimmen die Fourierreihenkoeffizienten c'_k des Signals $q(t)$. Da $y(t)$ T_0-periodisch ist, ist auch $q(t)$ T_0-periodisch. Die Fourierreihenkoeffizienten des Signals $q(t)$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}c'_k &= \frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0} q(t)e^{-2\pi i k t/T_0} dt \\ &= \frac{1}{T_0}\left(\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} q(t)e^{-2\pi i k t/T_0} dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} q(t)e^{-2\pi i k t/T_0} dt\right) \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} 2e^{-2\pi i k t/T_0} + 0.\end{aligned}$$

Die Fälle $k = 0$ und $k \neq 0$ müssen getrennt betrachtet werden. Für $k = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}c'_0 &= \frac{1}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} 2\, dt \\ &= 1.\end{aligned}$$

Für $k \neq 0$ erhält man hingegen

$$\begin{aligned} c'_k &= \frac{1}{T_0}\left[-\frac{2T_0}{2\pi i k} e^{-2\pi i k t/T_0}\right]_0^{\frac{T_0}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi i k}\left(1 - e^{-\pi i k}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi i k}, & \text{für ungerade } k \\ 0, & \text{für gerade } k. \end{cases} \end{aligned}$$

Da $y(t) = q(t) - 1$ gilt, sind die Fourierreihenkoeffizienten c_k des Signals $y(t)$ gegeben als $c_0 = 1 - 1 = 0$ und für $k \neq 0$ als $c_k = c'_k$.

3. **Aufgabe**

(a) Das Spektrum ist 1-periodisch in θ:

(b) An der Stelle $\theta = 1/2$ ist $\hat{x}_d(\theta) = 0$, also ist

$$\hat{y}(\theta) = \hat{x}_d(\theta) + \hat{r}(\theta) = \hat{r}(\theta).$$

Die Transformierte von $r[n] = \alpha\delta[n]$ ist gegeben durch

$$\hat{r}(\theta) = \alpha,$$

also folgt aus $\hat{y}(1/2) = 2$, dass

$$\alpha = \hat{r}(1/2) = 2.$$

Nun kann das Signal entstört werden, indem

$$z[n] = y[n] - 2\delta[n]$$

berechnet wird. Dieses Verfahren funktioniert nur bei Überabtastung, weil sonst keine "leeren" Bereiche im Spektrum $\hat{x}_d(\theta)$ existieren, an denen das Störsignal unabhängig vom Nutzsignal gemessen werden kann.

(c) Beide Messungen liegen in einem Bereich, in dem $\hat{x}_d(\theta) = 0$. Also kann im Prinzip das Verfahren analog zur vorherigen Teilaufgabe durchgeführt werden, nur dass man auf ein Gleichungssystem mit 2 Unbekannten stösst: Ganz allgemein ist nun

$$\hat{r}(\theta) = \alpha + \beta e^{-4\pi i\theta}.$$

Wir erhalten also folgende zwei Gleichungen:

$$\hat{y}(1/4) = 1 = \hat{r}(1/4) = \alpha + \beta e^{-\pi i}$$
$$\hat{y}(1/2) = 3 = \hat{r}(1/2) = \alpha + \beta e^{-2\pi i}$$

oder

$$1 = \alpha - \beta$$
$$3 = \alpha + \beta$$

Diese Gleichungssystem wird gelöst durch $\alpha = 2$, $\beta = 1$.
Das Signal lässt sich nun entstören, indem man

$$z[n] = y[n] - 2\delta[n] - \delta[n-2]$$

berechnet.

(d) Nun gilt es, L unbekannte Parameter zu bestimmen. Dazu braucht man mindestens L Gleichungen, also werden L Abtastwerte an verschiedenen (modulo 1) Frequenzen des Spektrums benötigt. Wieder sollten die Abtastwerte bei Frequenzen liegen, bei denen $\hat{x}_d(\theta) = 0$, also o.B.d.A. $1/8 < \theta < 7/8$. Allgemein gilt dann

$$\hat{r}(\theta) = \hat{y}(\theta) = \sum_{\ell=0}^{L-1} \alpha_\ell e^{-2\pi i \ell \theta}, \quad 1/8 < \theta < 7/8.$$

Angenommen, man hat nun L Abtastwerte des Spektrums $\hat{y}(\theta_i)$ bei den Frequenzen θ_i, $i = 0, \ldots, L-1$, $1/8 < \theta_i < 7/8$, dann lässt sich das Problem wie folgt formulieren:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & e^{-2\pi i \theta_0} & e^{-4\pi i \theta_0} & \ldots & e^{-2(L-1)\pi i \theta_0} \\ 1 & e^{-2\pi i \theta_1} & \ldots & \ldots & e^{-2(L-1)\pi i \theta_1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & e^{-2\pi i \theta_{L-1}} & & & e^{-2(L-1)\pi i \theta_{L-1}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{L-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}(\theta_0) \\ \hat{y}(\theta_1) \\ \vdots \\ \hat{y}(\theta_{L-1}) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{y}}}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{B}^{-1} \hat{\mathbf{y}}$$

Die Parameter lassen sich also berechnen, indem man die Matrix $\mathbf{B}$ invertiert und mit dem Vektor der Abtastwerte $\hat{\mathbf{y}}$ multipliziert.

Das Signal lässt sich dann entstören, indem man

$$z[n] = y[n] - \sum_{\ell=0}^{L-1} \alpha_\ell \delta[n - \ell]$$

berechnet.

Zusatz (nicht gefragt): Die Matrix $\mathbf{B}$ ist eine sogenannte *Vandermonde-Matrix*. Wenn alle Abtastfrequenzen θ_i verschieden sind, so ist garantiert, dass $\mathbf{B}$ nichtsingulär und damit auch invertierbar ist.

4. **Aufgabe**

(a) Gemäss dem Hinweis lässt sich das auftretende Integral als Faltung darstellen

$$\frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} x(\tau)d\tau = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} r(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

wobei

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Nimmt man nun die Fouriertransformation der gegebenen Differentialgleichung, so ergibt sich

$$(1 + 2\pi i f T)\,\hat{y}(f) = \frac{1}{2T}\frac{\sin(2\pi T f)}{\pi f}\hat{x}(f)$$

und damit

$$\hat{h}(f) = \frac{1}{(1 + 2\pi i f T)}\frac{\sin(2\pi T f)}{2\pi T f}.$$

(b) Die Übertragungsfunktion $\hat{h}(f)$ setzt sich aus einem Produkt zweier Faktoren zusammen, deren Rücktransformation aus der Formelsammlung bekannt ist. Die Impulsantwort besteht damit aus einer Faltung

$$h(t) = (g_1 * g_2)(t),$$

wobei

$$g_1(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}\sigma(t/T)$$
$$g_2(t) = \frac{1}{2T}r(t),$$

wobei $r(t)$ eine Rechteckfunktion nach obiger Definition darstellt. Das Faltungsprodukt kann nun entweder graphisch oder analytisch ausgewertet werden und wir erhalten:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -T \\ \frac{1}{2T^2}\int_0^{t+T} e^{-\tau/T}d\tau = \frac{1}{2T}\left(1 - e^{-t/T-1}\right) & \text{für } -T \leq t < T \\ \frac{1}{2T^2}\int_{t-T}^{t+T} e^{-\tau/T}d\tau = \frac{1}{2T}e^{-t/T}\left(e - \frac{1}{e}\right) & \text{für } t \geq T \end{cases}$$

(c) Da $h(t)$ für $t \in [-T, 0]$ nicht Null ist, liegt hierbei kein kausales System vor. Um das System nun kausal zu machen, genügt eine Zeitverschiebung um T. Da diese Zeitverschiebung im Frequenzbereich nur einer Multiplikation mit $e^{-2\pi i T f}$ entspricht, ist sichergestellt, dass sich dadurch keine Änderung des Betragsfrequenzgangs ergibt. Somit wählen wir

$$h_2(t) \triangleq h(t - T),$$

und erhalten im Frequenzbereich

$$\hat{h}_2(f) = e^{-2\pi i T f}\hat{h}(f).$$

(d) Aus der Formelsammlung erhalten wir für die Fouriertransformierte des Eingangssignals $x(t)$

$$\hat{x}(f) = \frac{1}{2}\left(\delta\left(f + \frac{1}{4T}\right) + \delta\left(f - \frac{1}{4T}\right)\right).$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}(\widehat{H_2 x})(f) &= \hat{h}_2(f)\hat{x}(f)\\ &= \frac{1}{2}\left(\hat{h}_2\left(-\frac{1}{4T}\right)\delta\left(f + \frac{1}{4T}\right) + \hat{h}_2\left(\frac{1}{4T}\right)\delta\left(f - \frac{1}{4T}\right)\right).\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\hat{h}_2\left(-\frac{1}{4T}\right) &= e^{\pi i/2}\hat{h}\left(-\frac{1}{4T}\right)\\ &= e^{\pi i/2}\frac{1}{(1-\pi i/2)}\frac{\sin(-\pi/2)}{-\pi/2}\\ &= -\frac{4}{\pi(\pi+2i)},\end{aligned}$$

und

$$\hat{h}_2\left(\frac{1}{4T}\right) = \hat{h}_2\left(-\frac{1}{4T}\right)^* = -\frac{4}{\pi(\pi-2i)}$$

erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned}(H_2 x)(t) &= -\frac{2}{\pi(\pi+2i)}e^{-\pi i t/(2T)} - \frac{2}{\pi(\pi-2i)}e^{\pi i t/(2T)}\\ &= \frac{4}{4+\pi^2}\left(-\cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right) + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)\right).\end{aligned}$$

(e) Das Ausgangssignal $(Hx)(t)$ ergibt sich aus dem Ausgangssignal $(H_2 x)(t)$ des Systems H_2 durch eine Zeitverschiebung um T, denn

$$(\widehat{Hx})(f) = \hat{h}(f)\hat{x}(f) = e^{2\pi i f T}\hat{h}_2(f)\hat{x}(f) = e^{2\pi i f T}(\widehat{H_2 x})(f),$$

das heisst

$$\begin{aligned}(Hx)(t) =& (H_2 x)(t+T)\\ =& \frac{4}{4+\pi^2}\left(\sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right) + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right)\right).\end{aligned}$$